

科学オリンピックへの道
岡山物理コンテスト 2022
問題 B

2022 年 10 月 22 日 (土)

14:45～15:45 (60 分)

問題にチャレンジする前に次の<注意事項>と<指数を用いた数の表記>をよく読んでください。問題は大問 2 題からなります。問題は一見難しく見えても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 開始の合図があるまで、問題冊子 (全 16 ページ) を開けてはいけません。
2. 電卓を使用してもよろしい。
3. 携帯電話やスマートフォンなどは電源を切り、カバンの中にしまっておきなさい。
4. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。解答用紙は 2 枚です。必ずチャレンジ番号と氏名を記入しなさい。
5. 気分が悪くなったりトイレに行きたくなったりした際は手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 質問があるときは質問用紙に記入し、手を挙げて監督者に渡しなさい。
7. 終了の合図があったら、ただちに解答を止め、チャレンジ番号と氏名を確認の上、監督者の指示を待ちなさい。
8. 問題冊子は持ち帰りなさい。

<指数を用いた数の表記>

大きい数や小さい数を扱うときは、指数表記を利用し、 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$) の形で表す。

$$1200 = 1.2 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.2 \times 10^3 \quad 0.0012 = \frac{1.2}{1000} = \frac{1.2}{10^3} = 1.2 \times 10^{-3}$$

このように表すことで、大きな数や小さな数を簡潔に表現できる。

【例】 地球から太陽までの距離 = 150000000 km = 1.5×10^8 km

電子の質量 = 0.000000000000000000000000000091 kg = 9.1×10^{-31} kg

また、指数表記をしたときの、先頭から 3 つ目の数字を四捨五入して表した数を「有効数字 2 桁」という。

【有効数字 2 桁の例】 $3.14 \Rightarrow 3.1$ $3776 \Rightarrow 3.8 \times 10^3$ $0.0125 \Rightarrow 1.3 \times 10^{-2}$

<参考>

【三角比】

直角三角形の直角でない角の大きさが1つ決まれば、3辺の比が決まる。図1のように3辺の長さとして角の大きさをそれぞれ a, b, c, θ とすると、正弦 (sin : サイン), 余弦 (cos : コサイン), 正接 (tan : タンジェント) は以下のように定義される。

$$\text{正弦} \quad \sin \theta = \frac{a}{c} \quad \text{余弦} \quad \cos \theta = \frac{b}{c} \quad \text{正接} \quad \tan \theta = \frac{a}{b}$$

これらを三角比という。

また、直角三角形の1つの辺の長さとして1つの角の大きさが決まれば、残りの辺の長さを三角比を用いて表すことができる。

$$\text{例} \quad a = c \sin \theta, \quad b = c \cos \theta$$

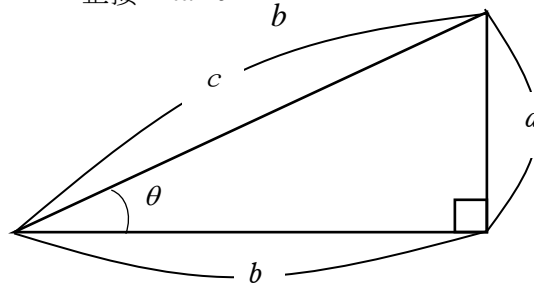


図1

【弧度法】

角度を表すのに、 180° や 360° のように、 $[\]$ という単位を使って表す度数法は日常生活で広く使われている。一方、数学や物理では、弧度法と呼ばれる表し方を用いる場合が多い。この表し方は次のように定義される。

半径と等しい長さの弧を持つおうぎ形の中心角の大きさを1ラジアン (記号 : rad) という。この rad を単位とした角の表し方を弧度法という。1つのおうぎ形において、弧の長さは中心角に比例するので、図2のような半径 r のおうぎ形において、中心角 θ [rad] に対する弧の長さを x とすると、

$$x = r \theta \quad \left(\text{または} \quad \theta = \frac{x}{r} \right)$$

したがって、半径 r の円では、円周は $2\pi r$ であるから、

$$\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ [rad]}$$

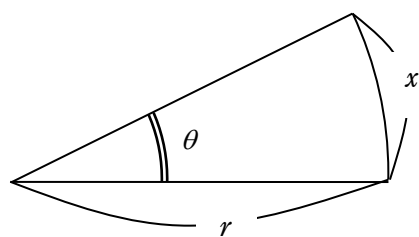


図2

よって、度数法との間に次の関係が成り立つ。

$$360^\circ = 2\pi \text{ [rad]}$$

【単位の主な接頭語】

記号 (読み)	大きさ	記号 (読み)	大きさ
G (ギガ)	10^9	c (センチ)	10^{-2}
M (メガ)	10^6	m (ミリ)	10^{-3}
k (キロ)	10^3	μ (マイクロ)	10^{-6}
h (ヘクト)	10^2	n (ナノ)	10^{-9}

第1問

かつて体重計はバネを使ったアナログ式であったが、現在はデジタル式になっている。デジタル式体重計は、バネを使うことなくどのように体重を測っているのか調べてみよう。

〔A〕 質量 60 kg の人が地球上で体重計に乗ると、60 kg と表示される。しかし、15°の斜面上に体重計を置いて乗ると、58 kg と表示された。また、例えば月で体重計に乗ると、10 kg と表示される。

問1 これらのことを踏まえると、体重計が測定している力は何という力か。力の名称を答えよ。

〔B〕 では、デジタル式体重計の内部を見てみよう。

図1-1のように体重計内部には、測定を行うための「ひずみゲージ」という部品が四隅に取り付けられている。

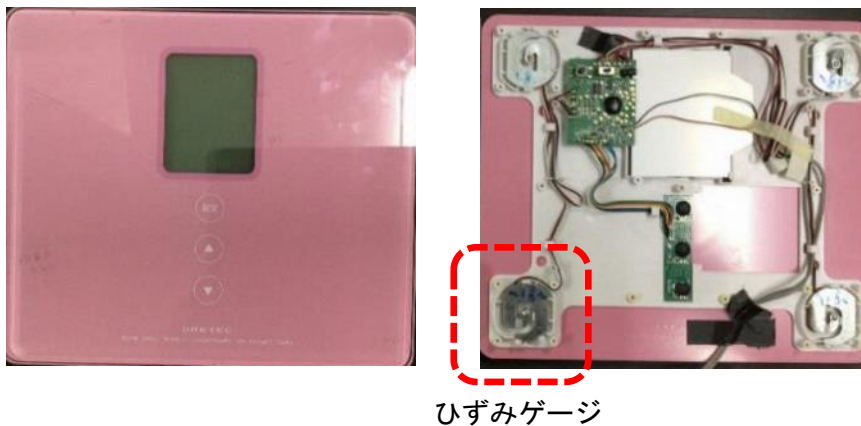


図1-1 体重計とその内部構造

ひずみゲージの内部には金属線が入っており、力が加わるとわずかに伸びて抵抗値が変化する。今、ひずみゲージのモデルとして、図1-2のように長さ d の金属線に力が加えられて、長さ $d + \Delta d$ に伸びるときを考える。

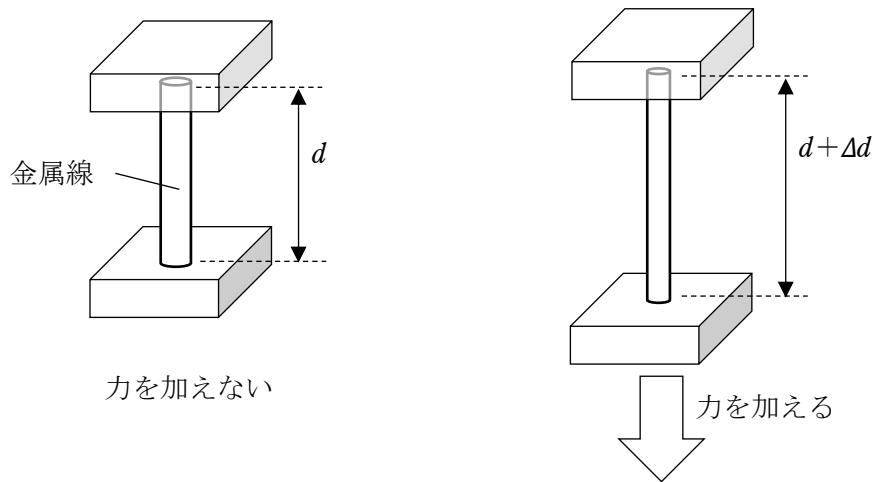


図1-2 ひずみゲージ（モデル）の金属線が伸びる

問2 図1-2において、力を加えたときの金属線の断面積は、力を加えないときの何倍になったか、 d 、 Δd を用いて表せ。ただし、金属線は均一に伸びていて、金属線の体積は変化しないものとする。

金属線の抵抗値 R は、金属線の長さ d に比例し、断面積 S に反比例するため、

$$R = \rho \frac{d}{S} \quad (\rho \text{ は金属の種類によって決まる比例定数})$$

で表すことができる。

問3 図1-2において、金属線に力が加わって伸びると、抵抗値は増加する。金属線の抵抗値は力が加わる前に比較して何倍となるか、 d 、 Δd を用いて表せ。ただし Δd は d より十分小さく、一般に微小な値 a について、 $(1+a)^n \doteq 1+na$ が成り立つことを用いよ。

(余白)

以上の理由から、ひずみゲージの金属線の抵抗値の変化 ΔR を測定することで、伸び Δd を知ることができる。そこで、微小な抵抗値の変化を測定するため、図 1-3 のように 3 つの抵抗を用いた回路（ブリッジ回路）と電圧計を用いる。

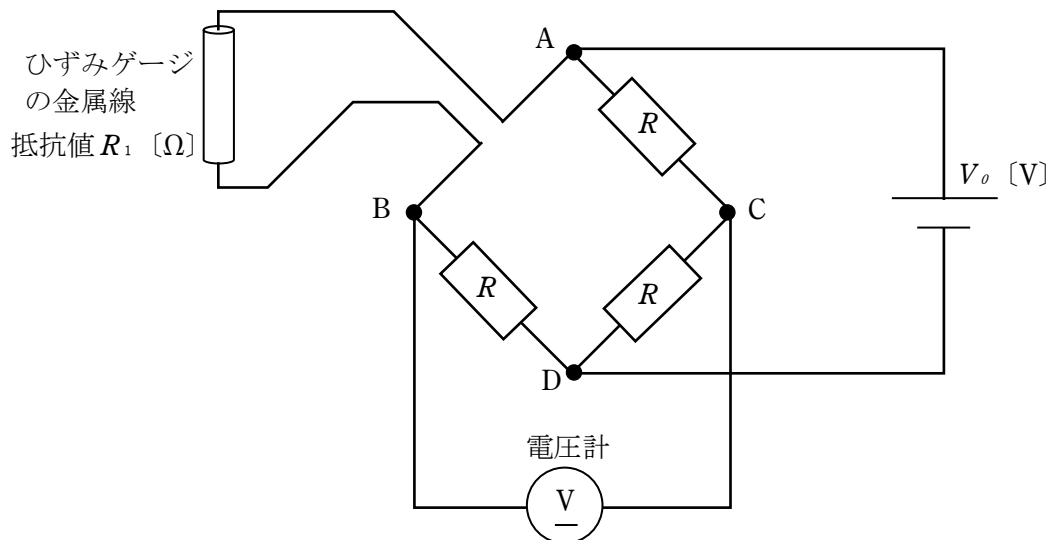


図 1-3 ひずみゲージの金属線とブリッジ回路

力を加えていないときのひずみゲージの金属線の抵抗値を $R_1 = R$ [Ω]、3 つの抵抗の抵抗値もそれぞれ R [Ω] とする。内部抵抗の無視できる起電力 V_0 [V] の電池に接続すると、B と C の電位差は 0 V である。

問 4 体重計に乗ると、ひずみゲージの金属線の抵抗値が $R_1 = R + \Delta R$ [Ω] になった。図 1-3 の点 B と点 C では、どちらの電位がより高いか、記号で答えよ。

図 1-3 の点 B と点 C の間の電位差 V_H を測定することで金属線の抵抗値の変化 ΔR が求められ、ひずみゲージの金属線の伸び Δd が分かる。

問 5 問 4 のとき、電位差 V_H の大きさが $V_H = \frac{1}{4} \times \frac{\Delta R}{R} V_0$ [V] となることを示せ。ただし、 ΔR は R より十分小さく、微小な値 a について、 $(1+a)^{-n} \approx 1-na$ が成り立つことを用いよ。

金属線の伸び Δd を、元の長さ d で割った値をひずみ ε (イプシロン) という ($\varepsilon = \frac{\Delta d}{d}$ と表せる)。金属線の向きに引く力を加えるとき、金属線の断面に加わる応力 (単位面積あたりの引く力の大きさ) σ (シグマ) は、ひずみ ε を用いて $\sigma = E\varepsilon$ と表すことができる (E は物質の種類によって決まる定数でヤング率という)。

今、ひずみゲージを用いた体重測定モデルとして、図 1-4 のような 4 本の金属線で体重を支え測定する装置を考えよう。この 4 本の金属線を、ひずみゲージの金属線として利用する。

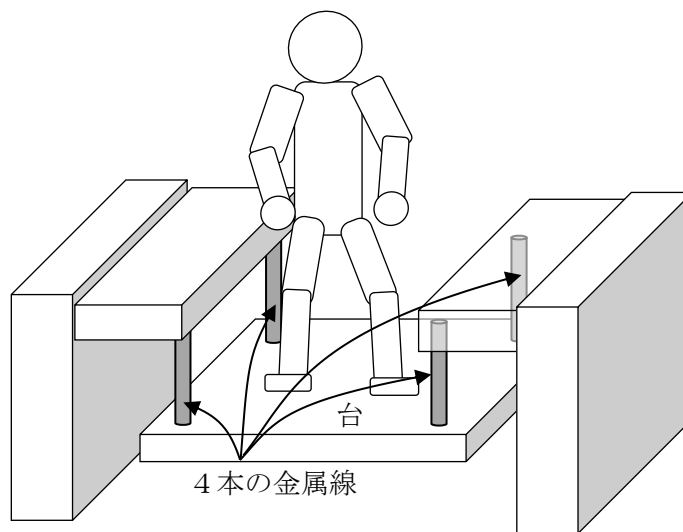


図 1-4 ひずみゲージを用いた体重測定モデル

問 6 次の文章は、この装置を使って太郎さんの体重を求める過程を示している。空欄 (ア) ~ (オ) に当てはまる数値を求めよ。なお、太郎さんが乗っている台の質量は無視できるものとする。

電池の電圧を $V_0 = 2.0 \text{ V}$ にし、太郎さんがこの装置に乗ったところ、4つのひずみゲージで測定された電位差はどれも、 $V_H = 7.5 \times 10^{-4} \text{ V}$ であった。

問 5 の式 $V_H = \frac{1}{4} \times \frac{\Delta R}{R} V_0$ から、 $\frac{\Delta R}{R} = (\text{ア})$ となる。

ひずみゲージの金属線において、一般に $\frac{\Delta R}{R}$ はひずみ ε と、 $\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon$ (ただし k は定数)

の関係がある。このひずみゲージの金属線で、 $k = 2.0$ であったとすると、ひずみ $\varepsilon = (\text{イ})$ となる。※ひずみ ε に単位はない (無次元量という)。

この金属線が、ヤング率 $E=2.0 \times 10^{11}$ Pa の鋼であるとする、
金属線にはたらく応力 σ は、 $\sigma=E\varepsilon$ から $\sigma=$ (ウ) Pa

応力 σ は、単位面積あたりの力なので、この金属線の断面積が $1.0 \times 10^{-6} \text{m}^2$ であったとすると、ひずみゲージの金属線 1 本にかかる力の大きさは (エ) N となる。

ひずみゲージの金属線は 4 本あるので、重力加速度の大きさは $g=9.8 \text{m/s}^2$ とすると、太郎さんの体重を有効数字 2 桁で求めると (オ) kgW となる。

なお、実際のひずみゲージ (図 1-5) は、金属線に力が直接加わるのではなく、金属線を貼り付けた台に力が加わる構造となっている。図 1-6 のように、台の上面に、細い金属線が何度も折り返して貼り付けられている。台の端に力が加わると、台がわずかに曲がり、台の上面が伸ばされるため、金属線もわずかに伸びる仕組みになっている。



図 1-5 ひずみゲージ (実物)

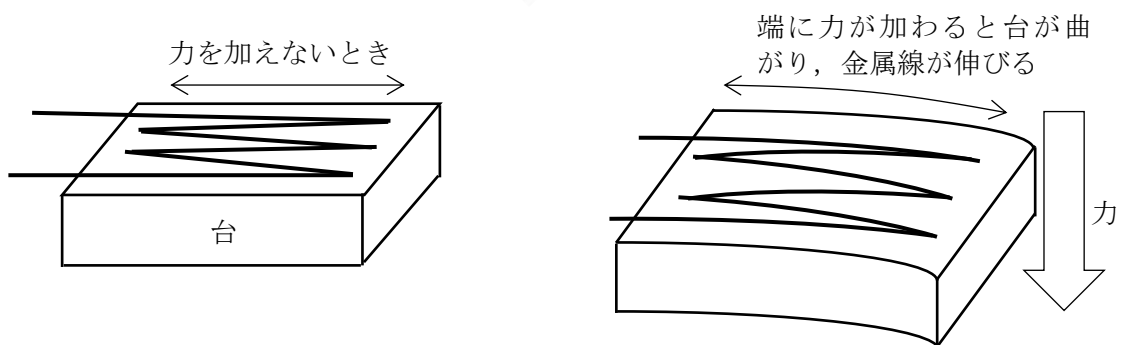


図 1-6 ひずみゲージの中の構造

第2問

物体の内部を直接目で見ることができないが、現代では様々な技術を用いることで、物体を破壊することなく内部の構造を知ることができる。このような例として次のものがある。

例1 封筒にコインを入れ、懐中電灯の光にかざすと、コインの影が見える（図2-1）。

例2 体内の骨に骨折の疑いがあるとき、病院でX線撮影をして確認する。

例3 古墳を透過してくるミュー粒子を検出することで、古墳内部の構造を推定することができる。

例1～例3では、光、X線（電磁波の一種）、ミュー粒子を当て、透過率の差を利用して物体内部の構造を調べている。例1では、封筒の紙は光を少し通すが、コインは全く通さない。その差によってコインの有無、形を推定できる。例2では、筋肉と骨でのX線の透過率の差によって内部を調べている。



図2-1 封筒にコインを入れ、照らした様子

問1 あるエネルギーのX線を地下に向けて入射させる。このとき、図2-2のように、X線の強度は、土壌を3cm透過するごとに半分に減少するものとする。入射したX線の強度が元の $\frac{1}{8}$ 倍になるのは、土壌を何cm透過したときか。ただし、土壌は均質な構造であるとする。

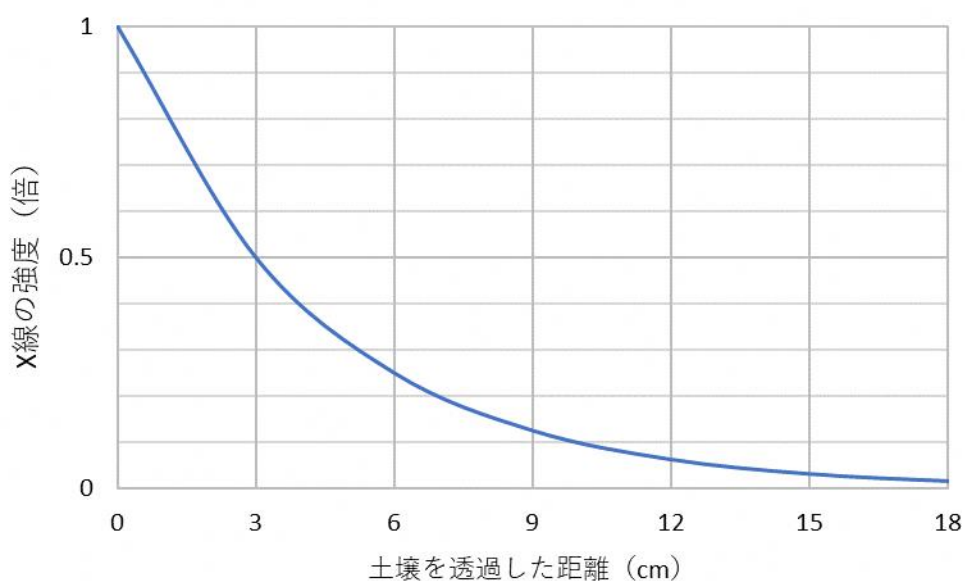


図2-2 土壌を透過するときのX線の強度の変化

このことから、体内のように数 cm～数十 cm の構造を推定するには X 線が利用できるが、それ以上大きな構造では透過できないことが分かる。さて、現在、造山古墳（図 2-3、岡山市北区新庄下）では、素粒子「ミュー粒子」を利用し、古墳を壊すことなく内部の構造を調べる試みが行われている。ミュー粒子は、光や X 線などに比べ透過力が高く、岩盤を数 m～数 km にわたり透過できる。このため、ミュー粒子を古墳に透過させれば内部の構造が推定できる。そこで、ミュー粒子が生じてから、古墳を透過し、検出器で検出されるまでの過程を追い、どのように内部の構造を推定するのか考えていこう。



図 2-3 造山古墳（岡山市教育委員会提供）

宇宙からは宇宙線と呼ばれる放射線が降り注いでいる。これらは地球の大気と原子核反応を起こし、ミュー粒子をはじめとする様々な粒子を生じる。こうして、地表から高さ 15km 付近でミュー粒子が生じ、地表に飛来する（図 2-4）ので、これを古墳の探査に用いる。

しかし、ミュー粒子は生じてから

$$T = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$$

の時間が経過すると別の粒子に変化してしまう。仮に光の速さ

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

で進んだとしても 660 m しか進めない。これではミュー粒子は地表まで到達できないことになってしまう。しかし、実際には地表の私たちの手のひらにも 1 秒間あたり 1 発ほど降り注いでいる。

実は、アインシュタインの特殊相対性理論から、速さ v で運動する物体では時間が γ （ガンマ）倍ゆっくり進むように観測されることがわかっている。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (c \text{ は光の速さ})$$

このため、静止している観測者からみると、光に近い速さで運動するミュー粒子では時間がのびて観測され、地表まで届くのである。

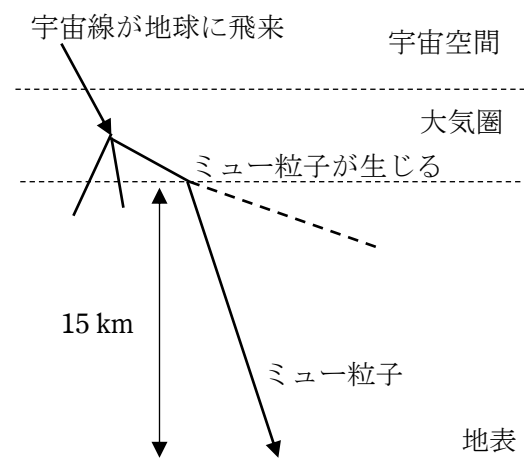


図 2-4 ミュー粒子が生じ、地表に到達するまでの過程

問2 ミュー粒子が光の 99.9 %の速さ v [m/s] で運動すると $\gamma = 22.4$ となり、時間がのびて観測される。このとき、ミュー粒子は生じてから別の粒子に変化するまでの間に、何 km 進むことができるか。有効数字 2 桁で求めよ。ただし、ミュー粒子は一定の速度で進むものとする。

ミュー粒子は速さに応じた運動エネルギーを持つ。地表に到達するミュー粒子の平均運動エネルギーは約 6.0×10^{-10} J であり、これは光の速さの約 99.96%の速さで運動していることに相当する。地表に到達したミュー粒子は、物体を透過するとき物体中の原子の影響を受け運動エネルギーを失い、すべて失うと静止する。ミュー粒子が密度 ρ (ロー) [kg/m³] の物体中を、距離 L [m] 透過するとき、ミュー粒子が失う運動エネルギー ΔE は次の式で与えられる。

$$\Delta E = 3.0 \times 10^{-14} \rho L \text{ [J]}$$

問3 運動エネルギーが 6.0×10^{-10} J のミュー粒子は、密度 2.5×10^3 kg/m³ の岩盤を何 m 進むことができるか。有効数字 1 桁で答えよ。ただし、この間、ミュー粒子が別の粒子に変化することはなかったものとする。

ミュー粒子を用いた探査では、対象物（例えば古墳）を透過したミュー粒子の数を計測して、密度を推定する。この仕組みを単純なモデルで考えてみよう。

図2-5のように、 $10\text{ m} \times 10\text{ m} \times 5.0\text{ m}$ の直方体の物体があり、全体が同じ物質できており、一辺 5.0 m の立方体の4つの領域（領域1~4）に区切った。内部に空洞が存在する場合、それぞれの平均密度が異なる。そこで、それぞれの平均密度を $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ [kg/m^3]とする。

また、立方体の面に垂直な経路1~4で飛来したミュー粒子を検出器1~4で捉えて数を計測する。簡単のため、各経路で発射するミュー粒子の数は、運動エネルギーごとに $1 \times 10^{-11}\text{ J}$ のものを100発、 $2 \times 10^{-11}\text{ J}$ のものを100発、 \dots 、 $100 \times 10^{-11}\text{ J}$ のものを100発の合計 $100 \times 100 = 10000$ 発とする。このとき、ミュー粒子が物体内で運動エネルギーをすべて失うと検出器まで届かないため、検出数に数えられない。また、経路1で発射するミュー粒子は、図2-5のように領域1の側面に均一に入射するとし、経路2~4についても同様とする。

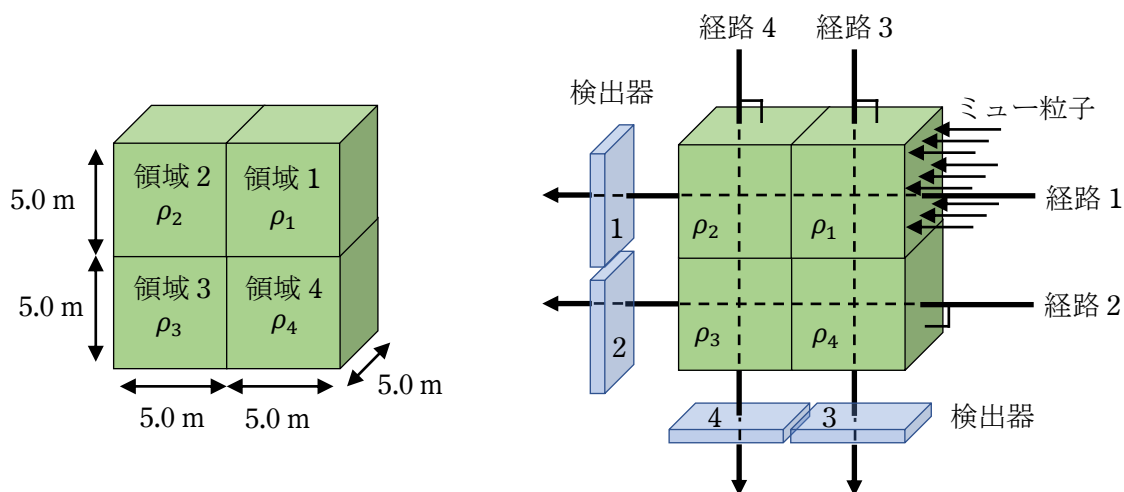


図2-5 ミュー粒子を用いた構造探査のモデル

問4 経路1を透過するときミュー粒子が失うエネルギー ΔE_1 [J] はいくらか。 ρ_1, ρ_2 を用いて表せ。

表 2 は、経路ごとに検出器で検出したミュウ粒子の数を示している。例えば、経路 1 による検出器 1 では合計 4900 発のミュウ粒子を検出した。残りの 5100 発は物体の内部で運動エネルギーをすべて失い検出器まで届かなかった。つまり、図 2-6 のように、 $51 \times 10^{-11} \text{ J}$ 以下の運動エネルギーを持っていたミュウ粒子は経路 1 を透過できなかったと考えられる。従って、ミュウ粒子は経路 1 を透過するには $51 \times 10^{-11} \text{ J}$ の運動エネルギーを失うと考えられるので、

$$\Delta E_1 = 51 \times 10^{-11} \text{ J}$$

経路 1～4 は長さが等しく、直方体の全体が同じ物質でできているので、失う運動エネルギーは等しいはずである。しかし、実際には経路ごとにミュウ粒子の検出数が異なったため、可能性の一つとして直方体の一部に空洞があると推測できる。

表 2 経路ごとに検出器で検出したミュウ粒子の数

	経路 1	経路 2	経路 3	経路 4
ミュウ粒子検出数	4900	6000	4600	6400

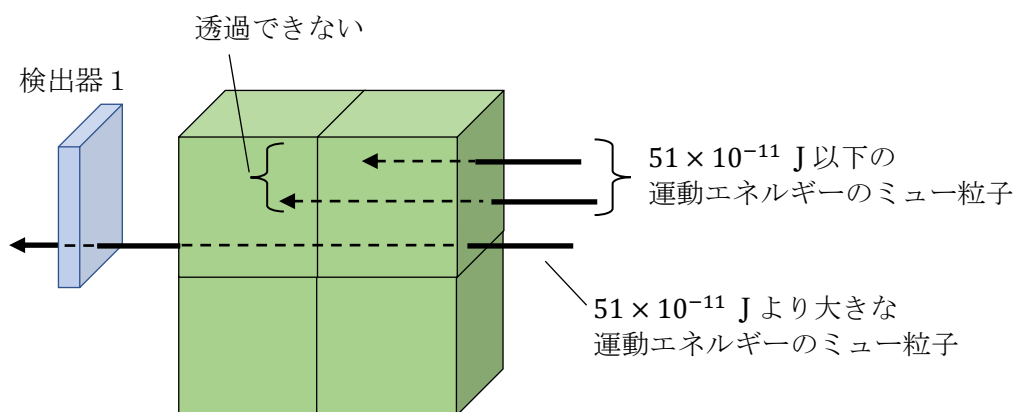
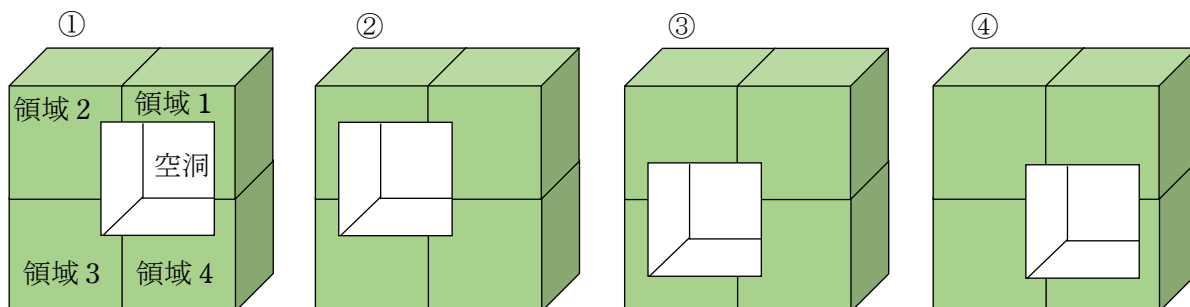


図 2-6 経路 1 のミュウ粒子の様子

問 5 この物体の内部には、一辺 5.0 m の立方体の空洞が存在するものとする。このとき、空洞が物体の中心からずれた位置にあると、各経路のミュウ粒子検出数の差が説明できる。空洞がどの位置にあるときに表 2 の結果を最も適切に説明できるか。次の①～④から一つ選べ。



このような方法でミュー粒子を用いて古墳の内部の構造を推定することができるのである。

実際には、あらゆる方向から飛来する様々なエネルギーを持つミュー粒子を検出するが、エネルギーごと、飛来角度ごとの飛来数はあらかじめ分かっている。そのため、検出器の計測数から、物体内部で止められたミュー粒子の割合を求めることで、その物体内部の構造を推定することができる（図2-7）。

物体の内部構造を探索する手法は多々あるが、ミュー粒子を用いたこの手法は数 m～数 km の構造物の測定に適しており、その密度を測定できるという点に特徴がある。この特徴を活かし、これまでに火山内部の構造や、ピラミッドの隠された石室の存在の有無、原子炉の中の燃料の位置など、従来の他の物理探索の手法では成し得なかった測定に成功している。

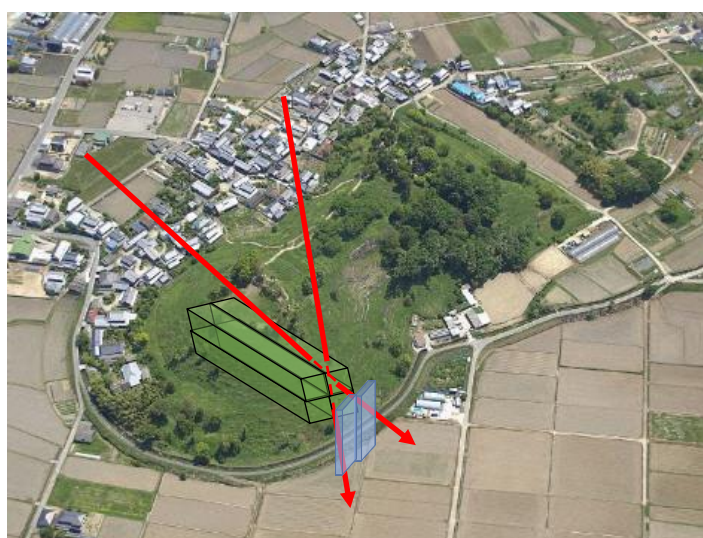
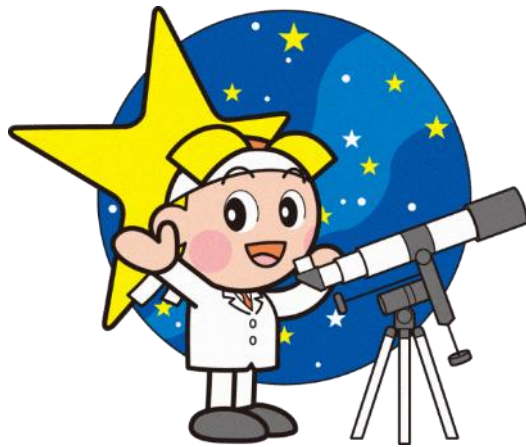


図2-7 ミュー粒子による造山古墳探索のイメージ
(岡山市教育委員会提供の画像をもとに作成)

(余白)



岡山県マスコット ももち