科学オリンピックへの道

岡山物理コンテスト2019

問題Ｂ

2019年10月19日（土）

11:25～12:35（70分）

問題にチャレンジする前に次の**＜注意事項＞**と**＜指数を用いた数の表記＞**をよく読んでください。
問題は大問３題からなります。問題は一見難しく見えても，よく読むとわかるようになっています。
どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

１．開始の合図があるまで，問題冊子（全13ページ）を開けてはいけません。
２．電卓を使用してもよろしい。
３．携帯電話やスマートフォンなどは電源を切り，カバンの中にしまっておきなさい。
４．解答はすべて解答用紙に記入しなさい。解答用紙は３枚です。必ずチャレンジ番号と氏名を記入しなさい。
５．気分が悪くなったりトイレに行きたくなったりした際は手を挙げて監督者に知らせなさい。
６．質問があるときは質問用紙に記入し，手を挙げて監督者に渡しなさい。
７．終了の合図があったら，ただちに解答を止め，チャレンジ番号と氏名を確認の上，監督者の指示を待ちなさい。
８．問題冊子は持ち帰りなさい。

＜指数を用いた数の表記と，有効数字による数の表記＞

大きい数や小さい数を扱うときは，指数表記を利用し，$a\times10^n$ （$1\leqq a<10$）の形で表す。

$$1200 = 1.2\times10\times10\times10 = 1.2\times10^3 \qquad 0.0012 = \frac{1.2}{1000} = \frac{1.2}{10^3} = 1.2\times10^{-3}$$

このように表すことで，大きな数や小さな数を簡潔に表現できる。

【例】　地球から太陽までの距離 ＝150000000 km ＝ 1.5×10^8 km

電子の質量 ＝0.00000000000000000000000000000091 kg ＝ 9.1×10^{-31} kg

また，先頭から３つ目の数字を四捨五入して表した数を「有効数字２桁」という。

【有効数字２桁の例】　3.14 ⇒ 3.1　　3776 ⇒ 3.8×10^3　　0.0125 ⇒ 1.3×10^{-2}

＜参考＞

【三角比】

直角三角形の直角でない角の大きさが１つ決まれば，３辺の比が決まる。**図１**のように３辺の長さと角の大きさをそれぞれ a，b，c，θ とすると，正弦（sin : サイン），余弦（cos : コサイン），正接（tan : タンジェント）は以下のように定義される。

正弦　$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$　　　余弦　$\cos\theta = \dfrac{b}{c}$　　　正接　$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

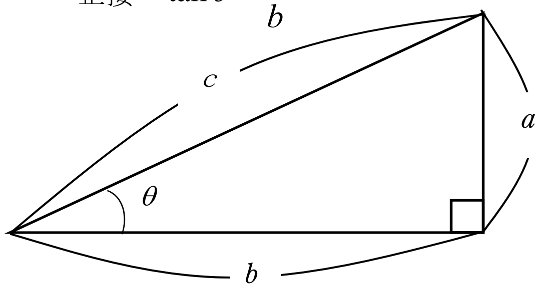


図１

これらを三角比という。

また，直角三角形の１つの辺の長さと１つの角の大きさが決まれば，残りの辺の長さを三角比を用いて表すことができる。

例　$a = c\sin\theta$ ，$b = c\cos\theta$

【弧度法】

角度を表すのに，180°や 360°のように，〔°〕という単位を使って表す度数法は日常生活で広く使われている。一方数学や物理では，弧度法と呼ばれる表し方を用いる場合が多い。この表し方は次のように定義される。

半径と等しい長さの弧を持つおうぎ形の中心角の大きさを１ラジアン（記号 : rad）という。この rad を単位とした角の表し方を弧度法という。１つのおうぎ形において，弧の長さは中心角に比例するので，**図２**のような半径 r のおうぎ形において，中心角 θ〔rad〕に対する弧の長さを x とすると，

$x = r\theta$　　　（ または　$\theta = \dfrac{x}{r}$ ）

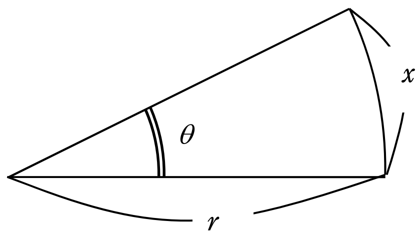


図２

したがって，半径 r の円では，円周は $2\pi r$ であるから，

$$\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{〔rad〕}$$

よって，度数法との間に次の関係が成り立つ。

360°＝2π〔rad〕

【単位の主な接頭語】

記号（読み）	大きさ	記号（読み）	大きさ
G（ギガ）	10^{9}	c（センチ）	10^{-2}
M（メガ）	10^{6}	m（ミリ）	10^{-3}
k（キロ）	10^{3}	μ（マイクロ）	10^{-6}
h（ヘクト）	10^{2}	n（ナノ）	10^{-9}

第１問

視力検査では，**図１−１**のような「ランドルト環」という図形を用いて，5.0 m 離れたところから，切れ目の位置を見分けることで視力を測定している。視力は，見分けることのできる角度（単位〔分〕）の大きさの逆数で表される。例えば，角度 1 分を見分けることができれば，その逆数から，視力は「1.0」となる。角度 0.5 分を見分けることができれば，その逆数から，視力は「2.0」となる。なお，角度「1 分」とは，「$\frac{1}{60}$ 度」を表す。円周率は 3.14 を用いよ。

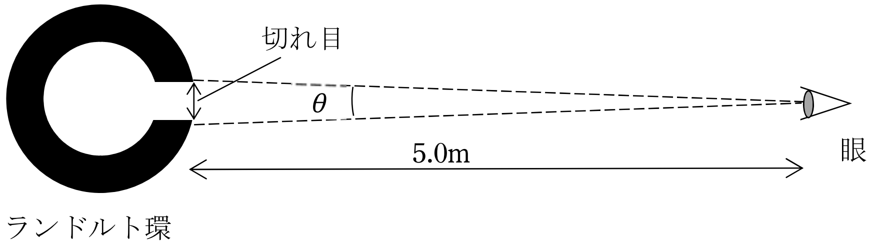


図１−１　視力検査

問１　視力「1.0」のランドルト環を 5.0 m 離れて見ると，切れ目が角度「１分」の大きさに見える。切れ目の長さは何 mm か。有効数字 2 桁で求めよ。

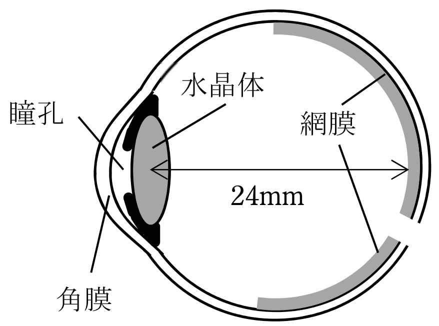


図１−２　眼球の構造

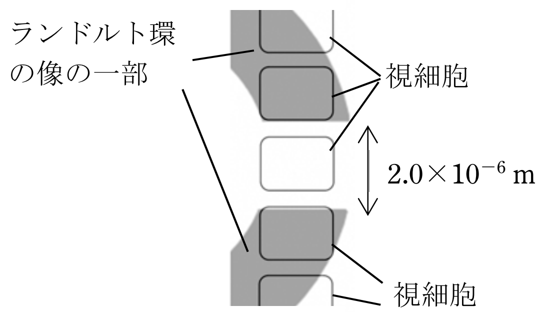


図１−３　実像の模式図

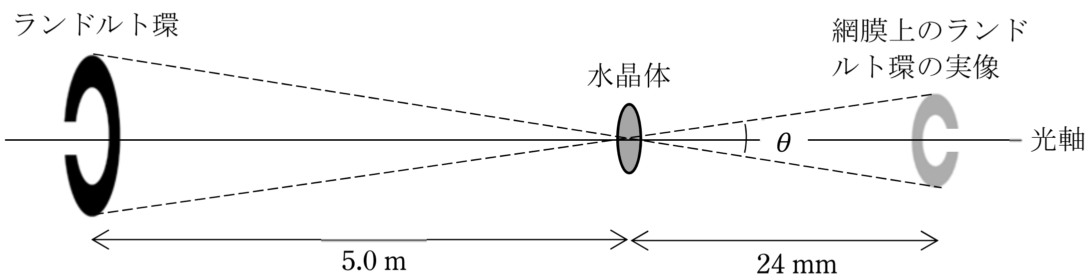


図１−４　網膜上の実像の模式図　　※図は見やすいよう誇張している

問２　眼球の構造は，**図１−２**のようになっている。角膜と水晶体が凸レンズのはたらきをし，網膜上に実像を作る。網膜には光を感じる視細胞がたくさん並んでいる。**図１−３**は，視細胞と，その上に写ったランドルト環の実像の模式図である。このように，ランドルト環の切れ目の実像が視細胞１個を隔てた距離に相当するときを，網膜の構造による視力の上限として考える。なお，**図１−４**は，視力検査のとき，水晶体のはたらきによってランドルト環の実像が網膜上にできる様子の模式図である。視細胞１個を隔てた距離を 2.0×10^{-6} m ，水晶体から網膜までの距離を 24 mm とするとき，見分けることのできる角度は何分か。有効数字２桁で求めよ。

問３　問２の結果から考えた場合のヒトの肉眼の視力の上限はいくらか。有効数字２桁で求めよ。

一方，レイリー（英，1842-1919）は「光の回折」という現象をもとに，直径 D〔m〕の円形レンズを用いて波長 λ〔m〕の光で観測を行うとき，見分けられる最小の角度 θ〔rad〕は

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

となることを導いた。ヒトの場合，瞳孔の大きさが有効なレンズの直径となる。視力検査の部屋での瞳孔の大きさを 3 mm 程度，可視光の波長の範囲を 3.8×10^{-7}～7.8×10^{-7} m 程度とする。波長が最も短いときに，見分けることのできる角度は最小となる。レイリーの式に当てはめると，θ≒1.5×10^{-4} rad ≒0.5 分となる。したがって，レンズの能力から考察すると，視力の限界は 1÷0.5＝2 程度となる。

このように，視細胞の大きさから考察しても，水晶体の能力から考察しても，例えば「視力 5」などは物理的にあり得ないことがわかる。

問４　今年４月，日本の国立天文台を含む国際共同プロジェクト「Event Horizon Telescope」（以下 EHT）は，ブラックホールの撮影に成功した。EHT では世界各地の 8 台の電波望遠鏡の信号を合成（干渉）して１つの望遠鏡としている。このとき，各電波望遠鏡は互いに離れているため，回折の影響が減少し，見分けられる最小の角度 θ〔rad〕は

$$\theta = \frac{\lambda}{D}$$

となる。この式の D を基線長といい，最も離れた１組の望遠鏡の間の距離を表し，EHT では約 12,000 km である。また，ブラックホールの姿を捉えるため，電波望遠鏡としては非常に短い波長である λ＝1.3 mm の電波を観測に用いた。EHT の能力をヒトの視力に例えるといくらに相当するか。有効数字１桁で答えよ。

EHT の能力は，視力検査では切れ目の長さが水素原子５個分ランドルト環のでも見分けることができ，また，月面に置いたゴルフボールを地上から見つけられることに相当する。

第２問

【参考：等加速度直線運動について】

物体の運動は，ある時刻での物体の位置と速度を与えることで表現することができる。たとえば，「今」「目の前を」「東に向かって 2.0 m/s で進んでいる」といえば，運動のイメージがわくであろう。「今」は「時刻」，「目の前を」は「位置」，「東に向かって 2.0 m/s で進んでいる」は「速度」を表している。「速度」とは，「速さ」と「移動の向き」をまとめた表現で，
「2.0 m/s」が「速さ」を表している。

また，時間が t 経過する間に速度が v_0 から v まで変化したとき

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \cdots ①$$

を加速度といい， v_0 を初速度という。

加速度 a が一定であるような運動を等加速度直線運動という。初速度の向きを運動の正の向きにとり， 加速度が正の等加速度直線運動をしている物体の，速度と時刻の関係をグラフに表すと**図２−１**のようになる。①式からグラフの傾きが加速度を表していることが分かる。また，グラフの灰色で示した領域の面積は，時間が t 経過する間に移動した距離を表している。

初速度 v_0 ，加速度 a で運動したとき，移動距離 x と速度 v は

$$x = v_o\ t + \frac{1}{2}\ at^2 \quad \cdots ② \qquad v = v_0 + at \quad \cdots ③ \qquad v^2 - v_0^2 = 2ax \quad \cdots ④$$

などの関係が成り立つ。ただし，はじめに物体がいた位置は $x = 0$ である。

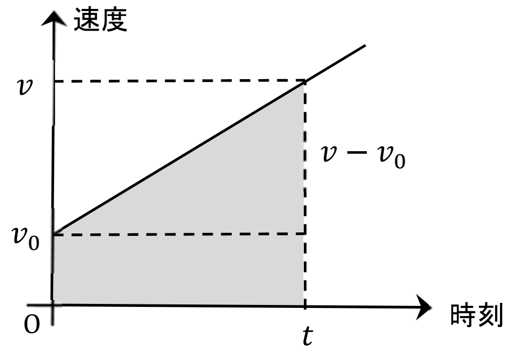


図２−１

【参考：運動方程式について】

質量 m の物体に加速度 a が生じているとき，物体にはたらいている合力を F とすると

$$ma = F \qquad \cdots ⑤$$

の関係があり，これを運動方程式という。

貨物列車が駅のホームを出発するとき，ガシャン！ガシャン！と貨物列車の連結器から音が聞こえることがある。この音について考察するために，**図２−２，２−３**のような貨物列車のモデルを作り，停車している貨物列車が発車するときの様子を考えよう。モデルは車両に見立てた物体を，軽くて伸び縮みしない糸でつないだものである。糸はぴんと張ったときに水平となるように取り付けている。糸がたるんでいる状態では張力は発生しない。はじめ，全体が静止した状態であり，車両をつないでいる糸は少しだけたるませておく。糸の張力が発生するまでは，次の車両は動かない。この状態から，質量 $4m$ の機関車に水平右向きに大きさ F の一定の外力を加えながら引っ張っていく。糸は，**図２−３**のように，直前の車両が l だけ前進したときに張力が発生する。一度張力の発生した糸が再度たるむことはない。機関車以外の車両の質量は全て m とする。

〔A〕 機関車が動き始めてから，２両目の車両が動き始める直前までを考えよう。

問１ 機関車の加速度の大きさを求めよ。

問２ ２両目が動き始めるまでの時間 T_1 を求めよ。

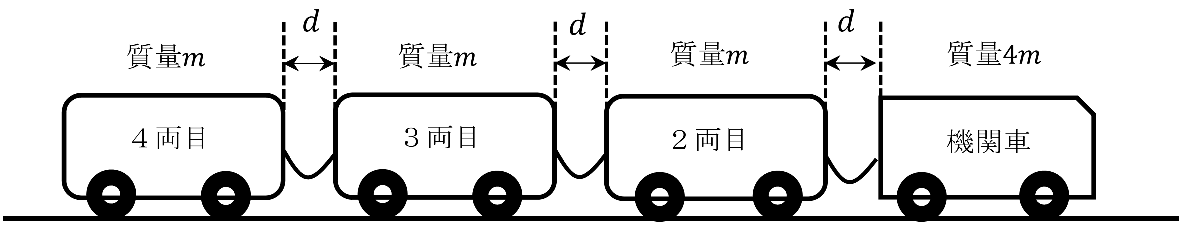


図２−２ 全体が静止している貨物列車

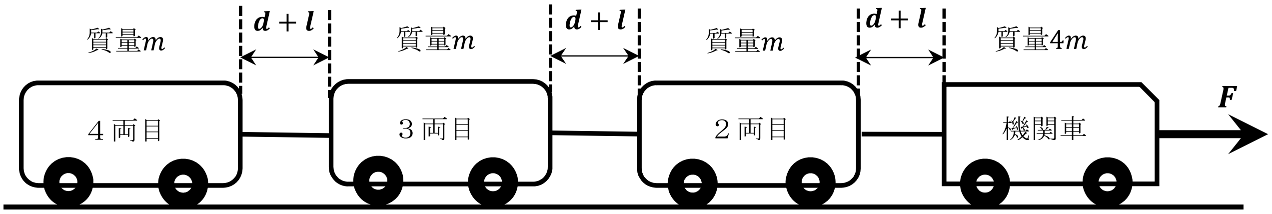


図２−３ 貨物列車全体が動いている様子

〔B〕機関車がある程度進み，糸がぴんと張って張力が発生すると，機関車と２両目が一体となって動きはじめる。次の文章を参考にして以下の問いに答えよ。水平右向きを運動の正の向きとする。

２両目の車両が動き始めた直後の速度は, 運動量保存の法則を用いて求めることができる。

運動量とは，物体の質量と速度により

（運動量）＝（質量）×（速度）

で定義される物理量である。

運動量保存の法則とは，２つの物体が一体となったり分裂したりするとき，互いに力を及ぼしあい，その前後で運動量の総和が変化しないことをいう。たとえば，速度v_Aで運動している質量 m_A の物体Ａと，速度v_Bで運動している質量 m_B の物体Ｂが衝突し，それぞれ速度v'_A，速度v'_Bになったとすると，この衝突の前後での運動量保存の法則は

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

となる。

問３　２両目が動き出す直前の機関車の速度をv_1とする。このときの機関車の運動量をv_1 とmで表せ。

問４　糸に張力が発生した直後，機関車と２両目は一体となり同じ速度で運動を始める。２両目が動きはじめた直後の機関車の速度v'_1 をv_1 で表せ。

問５　３両目が動きはじめる直前の機関車の速度 v_2 をv_1 で表せ。

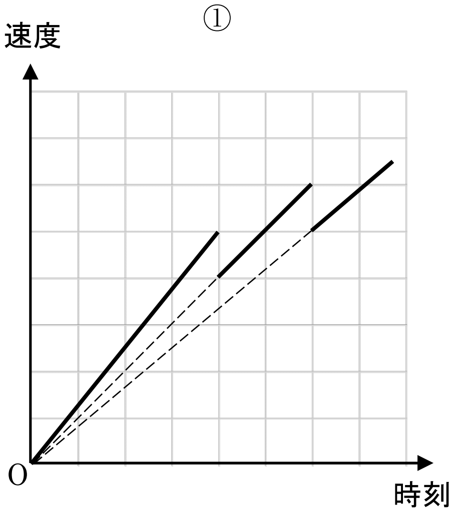
問６　２両目が動きはじめてから，３両目が動きはじめるまでの時間 T_2は, 問２のT_1 の何倍か。問４，問５の結果を参考にして求めよ。

問７　機関車の速度の変化を表すグラフとして最も適当なものを次のページの①～⑥から１つ選べ。ただしグラフの時刻は，機関車が動き始めてから４両目が動き出す直前までとなっている。

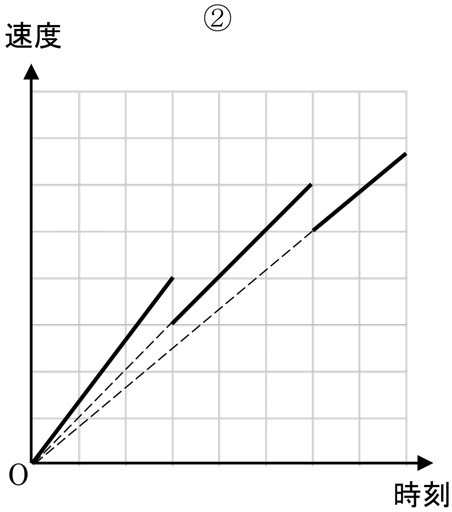
このように貨物列車の運動をグラフに表してみると，各車両が一体となることを繰り返しながら発車していく様子がよくわかる。貨物列車が駅のホームを出発するときの，ガシャン！ガシャン！という音は，車両同士が一体となるときの音であると考えられる。

（問７　選択肢のグラフ　破線は補助線）

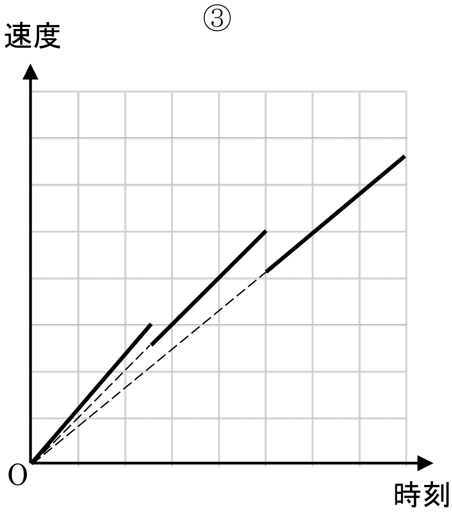
①



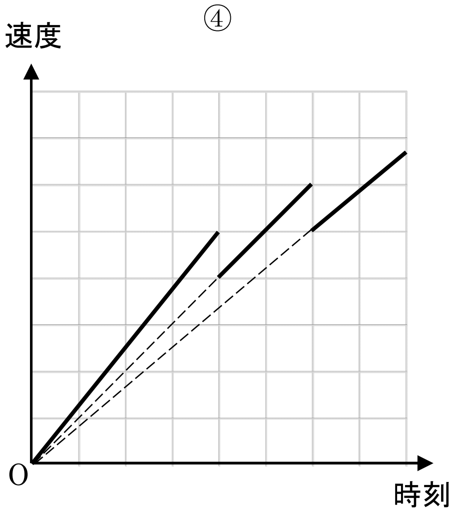
②



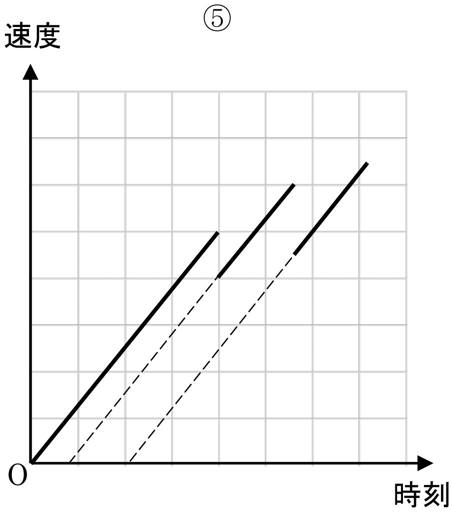
③



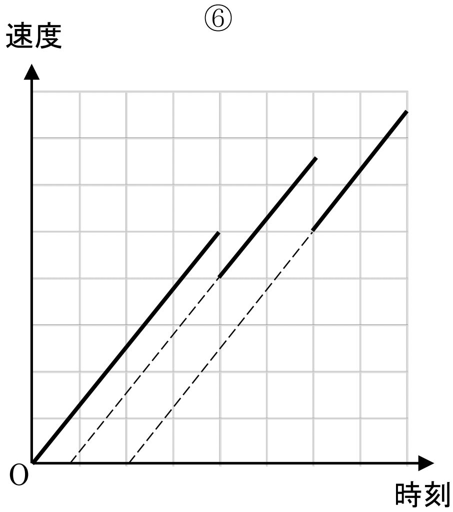
④



⑤



⑥



第３問

気象現象や海洋の循環に大きな影響を与えている「コリオリ力（転向力）」に関連した現象について考察しよう。コリオリ力とは，見かけの力の一種で，回転する円板に乗って物体の運動を見たときなどにはたらいているように見える力である。

図３−１のように，角速度ωで回転する円板の中心 P にピッチャーがおり，円板の端の点 C にいるキャッチャーに向かってまっすぐに球を投げたとする。円板の外の点 U には審判がいる。球は**図３−２**の矢印のように，審判に向かって等速直線運動（ここでは重力の影響を無視する）をする。ところが，**図３−２**の点 C の位置にいるキャッチャーから球を見ると，**図３−３**のように大きくそれていくように見える。このときキャッチャーから見て，球にはたらいているように見える力がコリオリ力である。

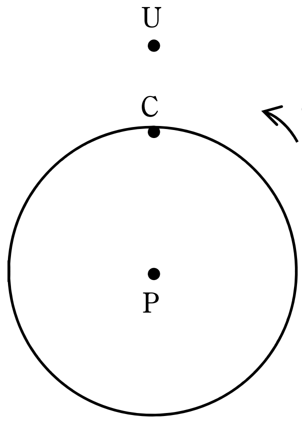


図３−１

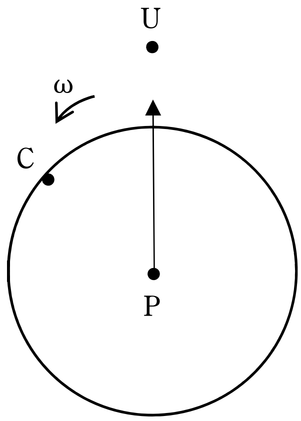


図３−２

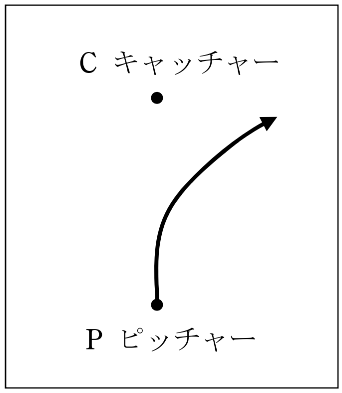


図３−３

今，円板の角速度を ω ，投げた球の速さを v，質量を m とすると，この球にはたらくコリオリ力 f は，一般に次の式で表される。

$$f = 2\,mv\omega$$

コリオリ力の向きは，速度の向きに対して常に直角右向きとなる。

【参考：角速度について】

角速度とは，1 秒当たりに回転する角度を表す物理量で，単位は〔rad/s〕となる。したがって，ちょうど 1 秒間で 1 回転する円板の角速度は，円周率を π とすると，2π〔rad/s〕となる。

コリオリ力の影響は，気象現象で顕著に表れ，台風は北半球では左巻きだが，南半球では右巻きになるなどがその例である。

地球上では，このコリオリ力が空気や海水にはたらき，さまざまな気象現象や海流に影響を与えている。

次の**図３－４**は，等圧線に沿って矢印（↑）の向きに吹く風の様子を模式的に表したものである。この風は，コリオリ力と，圧力勾配（または，気圧傾度力という）とよばれる力がつり合った状態で等圧線に平行に吹いている。このような風を地衡風という。圧力勾配とは，圧力の高い方（高圧側）から低い方（低圧側）に向けて加わる単位体積（１ m^3）当たりの力で，その大きさは次の式で表される。ここで，Δpは圧力の差で，Δxは距離を表す。

$$（圧力勾配）＝\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

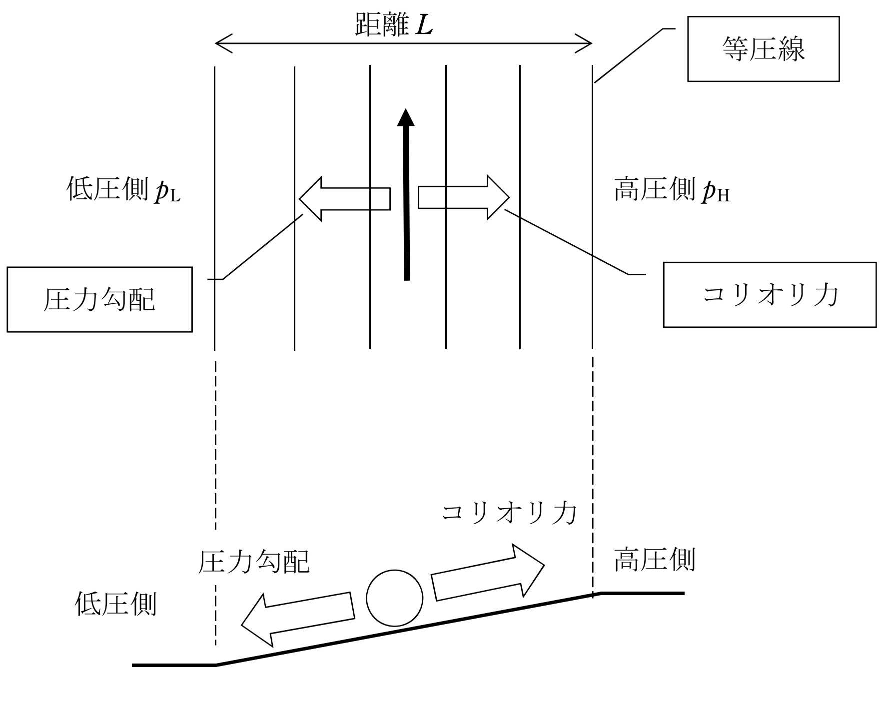


図３－４　圧力と位置の関係のイメージ

問１　**図３－４**の高圧側の気圧が p_H，低圧側の気圧が p_L，２点間の距離が L であったとする。このときの圧力勾配を，これらの３つの記号を用いて表せ。

問２　圧力勾配について次元解析（次元の組み合わせで物理量の意味を調べること）を行うと，単位体積（$1m^3$）当たりの空気塊にはたらく力の次元と，圧力勾配の次元が一致している。

次の表を参考に,「次元を表す記号」を用いて圧力勾配の次元を表したものとして正しいものを，下の①～④から１つ選べ。

【参考】例えば，速度の単位は m/s なので，次元は〔LT^{-1}〕と表される。

次元	次元を表す記号	国際単位系（SI）
長さ	L	m
質量	M	kg
時間	T	s

①　〔MT^{-1}〕　②〔MT^{-2}〕　③〔$ML^{-1}T^{-2}$〕　④〔$ML^{-2}T^{-2}$〕

単位体積当たりの空気塊にはたらくコリオリ力と圧力勾配とのつり合いの式は次のようになる。ρ は空気塊の密度である。

$$2\rho v\omega = \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

問３　地球の自転の角速度 Ω を，有効数字２桁で求めよ。地球は 24 時間で１回転するものとする。円周率は 3.14 を用いよ。

地球上では，コリオリ力は緯度によって大きさが異なる。赤道では 0（ゼロ）となり，はたらかない。また，北極と南極では最大となる。

地球上の緯度がθの地点での，コリオリ力と圧力勾配とのつり合いの式は次のようになる。

$$2\rho v\Omega \cdot \sin\theta = \frac{\Delta p}{\Delta x} \quad ・・・（１）$$

問４　空気の密度を 1.0 kg/m^3，緯度を 30°，高気圧（高圧側）と低気圧（低圧側）の気圧の差を 2.0 hPa，距離を 2.0×10^2 km として，このときの地衡風の速さを有効数字２桁で求めよ。

次に，海洋に目を転じてみよう。次の**図３−５**のように，日本付近には黒潮と呼ばれる強い流れがある。海流もコリオリ力の影響を受けており，高知付近では，海岸よりも沖合の方が水位が高いことが知られている（気象庁 HP による）。この海流も，コリオリ力と圧力勾配がつり合った状態で流れていると考えると，海岸付近よりも沖合の方がいくら水位が高いかを計算することができる。

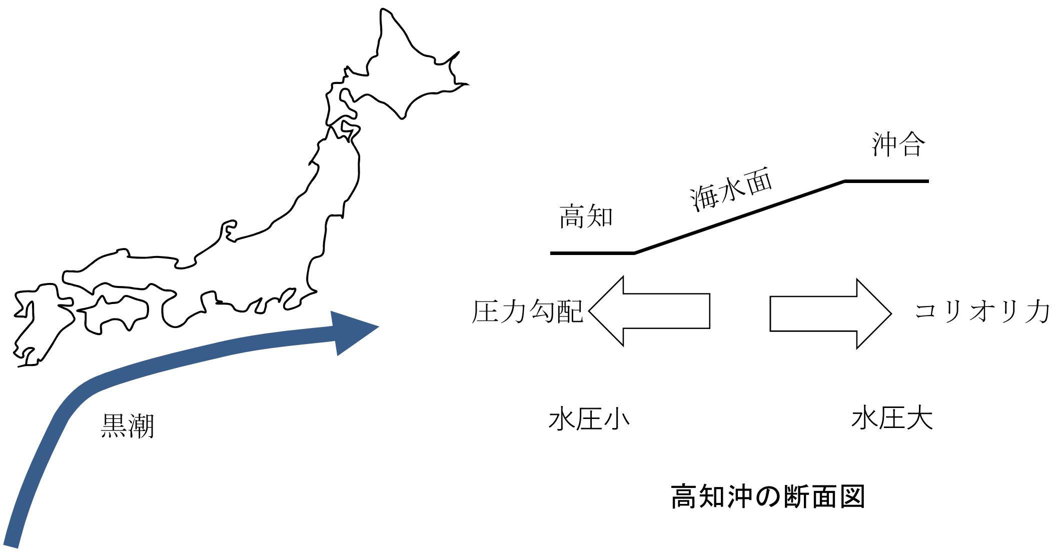


図３−５

問５　水の密度を ρ' とする。このとき，**図３−６**のように，高さが h の水の柱が底面に及ぼす圧力（水圧）はどう表されるか。重力加速度の大きさを g とする。

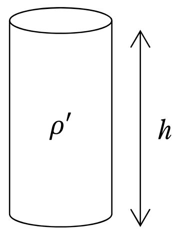


図３−６

問６　海水の密度を 1.0×10^3 kg/ m^3, 黒潮の速さを 2.0 m/s, 黒潮の幅を 1.0×10^2 km, 緯度を 30°，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とすると，沖合の方が海岸付近よりもいくら水位が高いか，P.11 の式（１）が成立するものとして，答えを有効数字２桁で求めよ。

岡山県マスコット　ももっち