

第1問

雨上がりの空に虹が見えることがある。虹は大気中の水滴に太陽光が屈折、反射してできる。太陽光にはすべての色の光が混ざって白い光（白色光）になっている。光の色によって屈折の割合（屈折率）が異なるため、白色光が水滴中を進むことによって、いろいろな色に分かれてしまう（これを分散という）。これにより、虹は七色に色づいて見えるのである。色と屈折率の大小関係を右の表1に示す。

表1

屈折率	
小	大
赤	紫

太陽の周りに薄い雲がかかったとき、太陽の周りに虹の輪のようなものが見えることがある。図1はその模式図である。これを日暈（ハロー、ひがさ）という。日暈は雲の中の氷の結晶が光を屈折、分散させることにより生じると考えられている。

雲の中の氷の結晶は正六角柱のような形状であり、この中を光が進むことにより光の分散が起きる。暈の大きさは、六角柱への光の入射の向きによって異なるが、図2のように側面から入射し、側面から出ていく場合を考えてみよう。

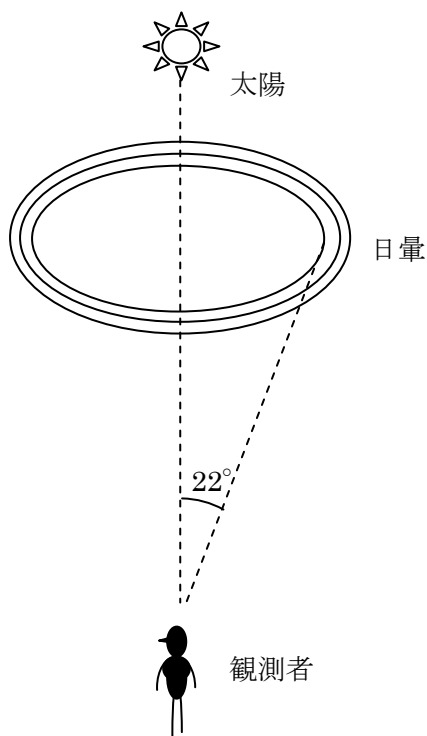


図1

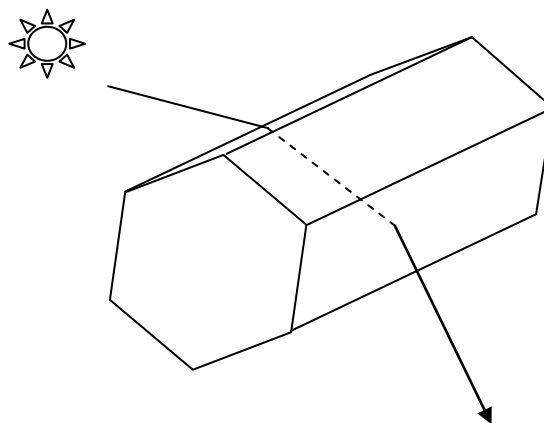


図2

問1 図3は白色光が氷の結晶に入射して、赤、黄、青の光が氷の結晶中を進んでいく様子を表している。最も適当なものを、次の①～④の中から一つ選びなさい。

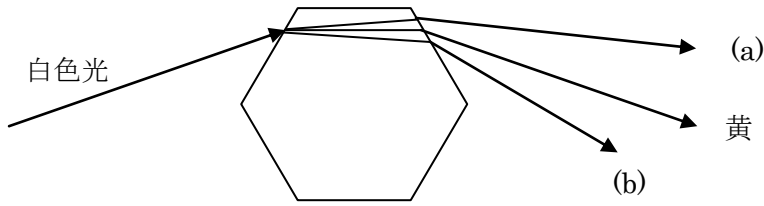


図3

- ① 赤い光は(a), 青い光は(b)を通るので, 日暈の色は外側から青・黄・赤の順となる。
- ② 赤い光は(a), 青い光は(b)を通るので, 日暈の色は外側から赤・黄・青の順となる。
- ③ 赤い光は(b), 青い光は(a)を通るので, 日暈の色は外側から青・黄・赤の順となる。
- ④ 赤い光は(b), 青い光は(a)を通るので, 日暈の色は外側から赤・黄・青の順となる。

問2 図4は正六角柱の氷の結晶中をある光が進む様子を図3より詳しく表している。図3のように氷の結晶 AB 面への光の入射角を θ_1 屈折して氷の中に進んでいく角度を θ_2 再び氷の結晶 CD 面から空気中に入射していく角度を θ_3 屈折して出ていく角度を θ_4 とする。また、氷の結晶を屈折したのち脱出した光と、元の光の進行方向のなす角度（偏角）を θ_5 とする。このときの θ_2 と θ_3 の関係を式で表しなさい。ただし、氷の結晶に入射する光は、AB 面から入射し、CD 面から出ていくものとする。

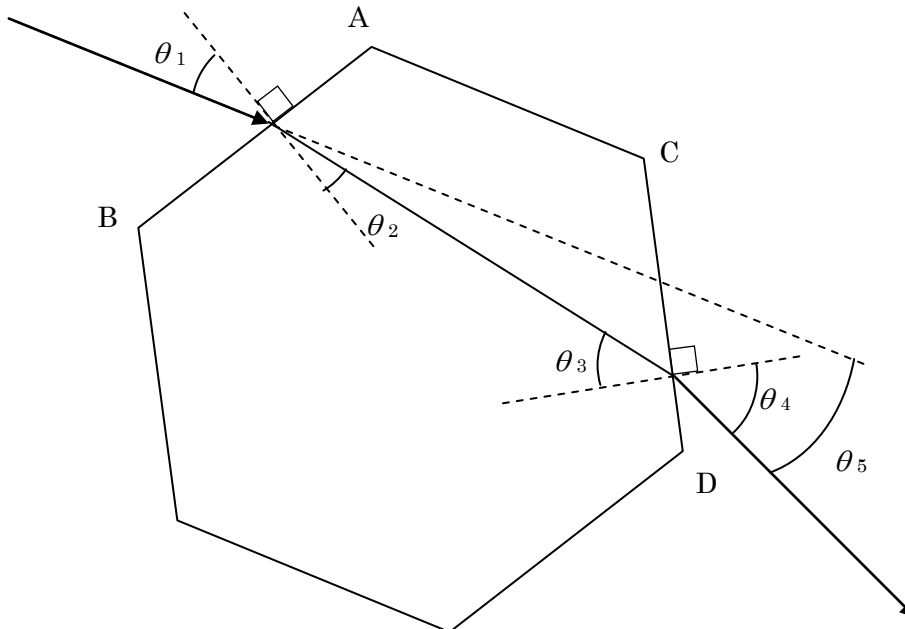


図4

問3 θ_1 と θ_2 , θ_3 と θ_4 , は屈折の法則という関係で結びつけられる。これらの式をつかうと、 θ_2 と θ_3 は消去できる。 θ_5 を、 θ_1 と θ_4 で表しなさい。

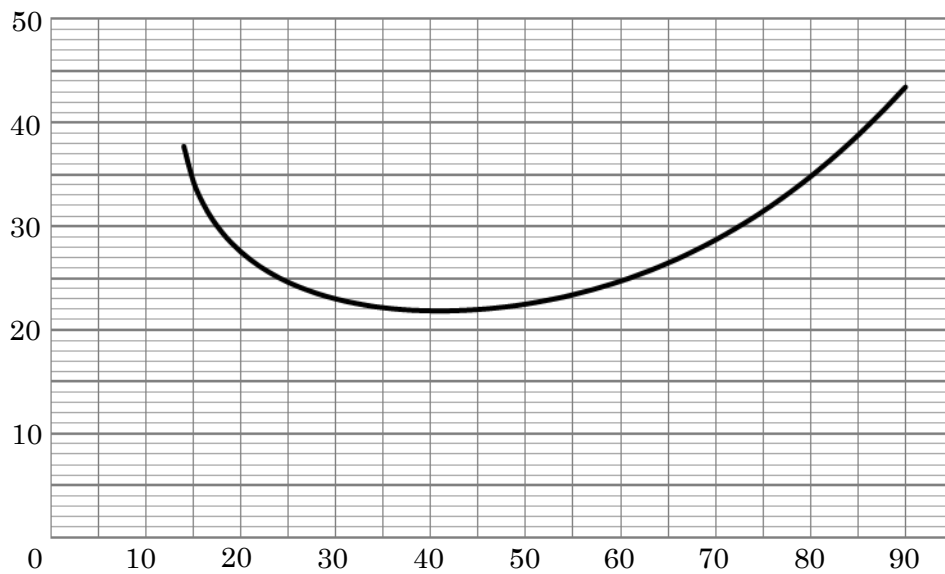
問4 $\theta_1 \sim \theta_5$ の関係を問3の式や氷の屈折率(1.31)をもとに計算したものが表2である。表2によると入射角 θ_1 が 14° 未満の時にはCD面から光が出ていないことを示している。入射角 θ_1 が 14° 未満の時にはなぜCD面から光が出て行かないのか。光の性質を用いて答えなさい。

表2 (単位はすべて $[\circ]$) であ

θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
1	0.76	59.24			31	23.15	36.85	51.78	22.78	61	41.88	18.12	24.04	25.03
2	1.53	58.47			32	23.86	36.14	50.59	22.59	62	42.38	17.62	23.37	25.37
3	2.29	57.71			33	24.57	35.43	49.42	22.42	63	42.86	17.14	22.72	25.71
4	3.05	56.95			34	25.27	34.73	48.28	22.27	64	43.32	16.68	22.08	26.08
5	3.81	56.19			35	25.97	34.03	47.15	22.15	65	43.77	16.23	21.47	26.47
6	4.58	55.42			36	26.66	33.34	46.05	22.05	66	44.21	15.79	20.88	26.87
7	5.34	54.66			37	27.35	32.65	44.97	21.97	67	44.64	15.36	20.30	27.30
8	6.10	53.90			38	28.03	31.97	43.91	21.91	68	45.05	14.95	19.75	27.75
9	6.86	53.14			39	28.71	31.29	42.87	21.87	69	45.45	14.55	19.21	28.21
10	7.62	52.38			40	29.38	30.62	41.85	21.85	70	45.83	14.17	18.70	28.70
11	8.38	51.62			41	30.05	29.95	40.84	21.84	71	46.20	13.80	18.21	29.21
12	9.13	50.87			42	30.72	29.28	39.85	21.85	72	46.55	13.45	17.74	29.74
13	9.89	50.11			43	31.37	28.63	38.88	21.88	73	46.89	13.11	17.29	30.29
14	10.64	49.36	83.73	37.73	44	32.02	27.98	37.92	21.92	74	47.20	12.80	16.87	30.86
15	11.39	48.61	79.34	34.33	45	32.67	27.33	36.98	21.98	75	47.51	12.49	16.46	31.46
16	12.15	47.85	76.24	32.24	46	33.31	26.69	36.05	22.05	76	47.79	12.21	16.09	32.08
17	12.90	47.10	73.68	30.68	47	33.94	26.06	35.14	22.14	77	48.06	11.94	15.73	32.73
18	13.64	46.36	71.44	29.44	48	34.56	25.44	34.24	22.24	78	48.30	11.70	15.40	33.40
19	14.39	45.61	69.41	28.41	49	35.18	24.82	33.36	22.36	79	48.53	11.47	15.10	34.09
20	15.13	44.87	67.54	27.54	50	35.79	24.21	32.50	22.50	80	48.74	11.26	14.82	34.81
21	15.88	44.12	65.79	26.79	51	36.39	23.61	31.65	22.65	81	48.93	11.07	14.56	35.56
22	16.62	43.38	64.13	26.13	52	36.98	23.02	30.82	22.82	82	49.11	10.89	14.33	36.33
23	17.35	42.65	62.56	25.56	53	37.56	22.44	30.00	23.00	83	49.26	10.74	14.13	37.13
24	18.09	41.91	61.05	25.05	54	38.14	21.86	29.20	23.19	84	49.39	10.61	13.96	37.95
25	18.82	41.18	59.60	24.60	55	38.70	21.30	28.41	23.41	85	49.50	10.50	13.81	38.80
26	19.55	40.45	58.20	24.20	56	39.26	20.74	27.64	23.64	86	49.60	10.40	13.68	39.68
27	20.28	39.72	56.85	23.85	57	39.81	20.19	26.89	23.88	87	49.67	10.33	13.59	40.59
28	21.00	39.00	55.53	23.53	58	40.34	19.66	26.15	24.15	88	49.72	10.28	13.52	41.52
29	21.72	38.28	54.25	23.25	59	40.87	19.13	25.43	24.42	89	49.75	10.25	13.48	42.48
30	22.44	37.56	53.00	23.00	60	41.38	18.62	24.72	24.72	90	49.76	10.24	13.47	43.46

問5 図5は表2のうち θ_1 と θ_5 の関係をグラフにしたものである。図1のように日暈は太陽光と約 22° の方向に見える。このような角度に見える理由を表2及び図5のデータを参考に説明しなさい。

偏角 θ_5 [°]



入射角 θ_1 [°]

図5

第2問

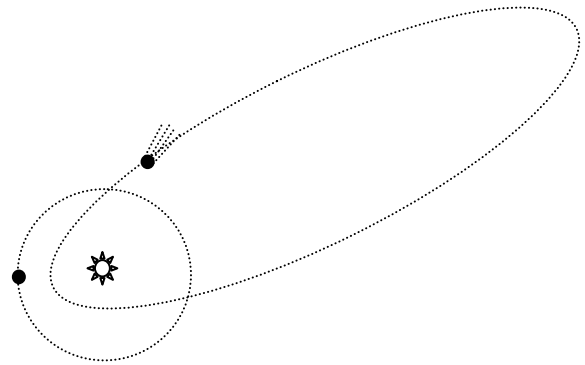
17世紀はじめ、ヨハネス・ケプラーは、惑星の観測結果をもとに、惑星の運行に関する次の三つの法則を見出した。現在、この法則は「ケプラーの法則」とよばれている。

【第一法則】 惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運行する。

【第二法則】 惑星と太陽とを結ぶ線分が一定時間に通過する面積は一定である。

【第三法則】 すべての惑星の公転周期の2乗と軌道楕円の長半径の3乗の比は一定になる。

ケプラーはこの法則の原因として、太陽と惑星との間に引力が存在することには気づいていたが、その力の正体を解明したのは、アイザック・ニュートンである。17世紀後半に、ニュートンは、地上で働いている重力が月や惑星に対しても働いていると考えて万有引力の法則を見出し、ケプラーの法則を理論的に説明することに成功した。ここでは、ニュートンの考えにならって、ケプラーの法則の第二法則について考えてみる。



問1 1秒のような短い時間では惑星は近似的に直線運動をしていると考えることができる。図1の点Sに太陽があり、A→B、B→Cはそれぞれ、1秒あたりの惑星の位置の変化をあらわしている。点Aにある惑星が1秒間にSAと垂直に点Bまで進んだ。太陽から点Aにある惑星までの距離を r [m]、点Aでの惑星の速さを V [m/s] とする。△SABの面積はいくらか。

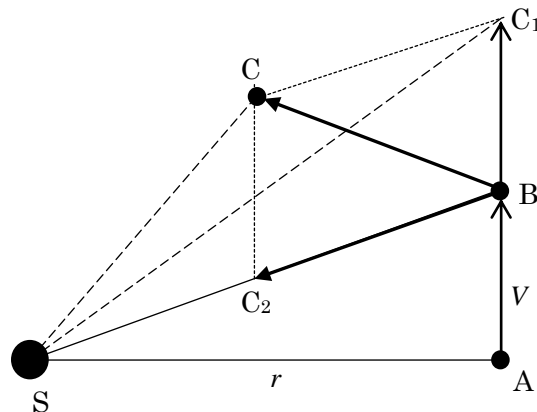


図1

太陽から惑星に引力がはたらかなければ、惑星は点 B から 1 秒後に点 C_1 まで進む。しかし、実際には、点 B から点 S の方向に太陽から惑星に引力がはたらくため、1 秒あたり BC_2 の速度変化がおきる。したがって、惑星の速度は BC_1 と BC_2 を二辺とする平行四辺形の対角線を結んだ BC になり、1 秒後には点 C に進むことがわかる。さらに、点 C でも太陽から惑星に引力がはたらき、速度変化がおきる。

問 2 $\triangle SAB$ と $\triangle SBC$ の面積が等しいことを説明しなさい。

(ヒント) 三つの三角形 $\triangle SAB$, $\triangle SBC_1$, $\triangle SBC$ の関係を考えればよい。

問 3 解答欄には、点 C での速度変化を示してある。次の 1 秒後に惑星が進む点 D を作図によって示しなさい。

このようにして順に考えてゆくと、惑星は太陽から引力をうければ、決まった時間に一定の面積をつくる運動をすることがわかる。この関係はケプラーの法則の第二法則に他ならない。

一方、ニュートンの友人であったエドモンド・ハレーは、ニュートンの見出した万有引力の法則を彗星にも適用し、約76年の周期で出現する大彗星が同一の彗星であることをつきとめた。この彗星は、今日、「ハレー彗星」と呼ばれている。ハレー彗星は図2のように、点Sにある太陽を一つの焦点とした楕円軌道上を運動している。今回は1986年に太陽に接近し、2月9日に近日点Pを通過した。近日点とは太陽からの距離が一番近い位置である。

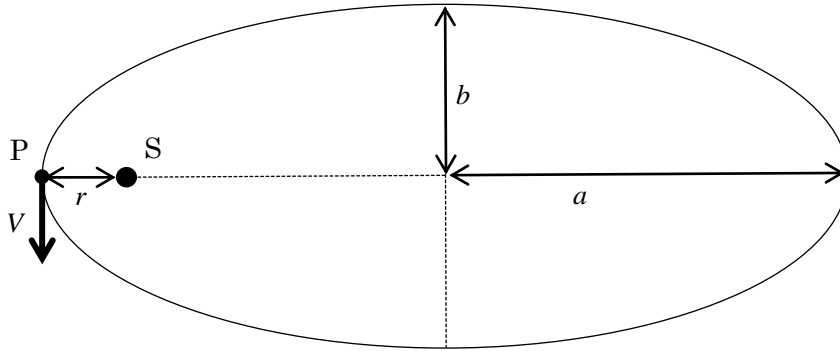


図2

問4 2014年現在の彗星の位置を図3のQ点とする。斜線部の面積は、楕円の面積の何倍になるか。有効数字2桁で答えなさい。ただし、図3は正しく作図されているわけではない。

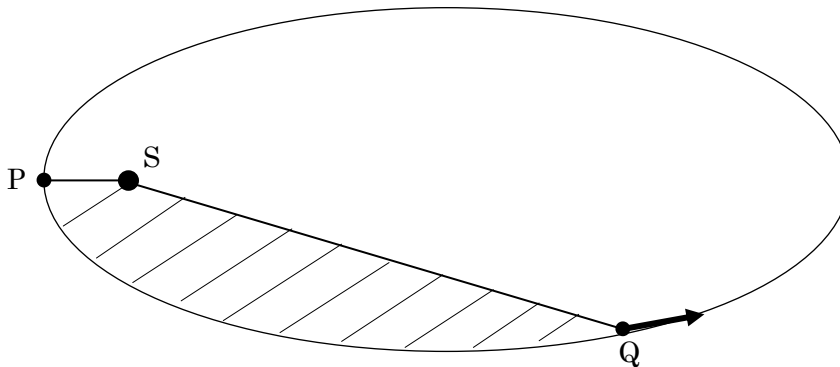


図3

問5 ハレー彗星は一定の速さで軌道上を動いているわけではない。これまでの考察の結果と以下の数値を用いて、彗星が近日点 P を通過する時の速さ V [km/s] を求め、有効数字 2 桁で答えよ。ただし、楕円の面積は長半径を a 、短半径を b として πab である。

楕円の長半径： $a=2.7\times 10^9$ [km] 楕円の短半径： $b=6.7\times 10^8$ [km]

太陽から近日点までの距離： $r=8.7\times 10^7$ [km] (太陽から地球までの距離の約 0.6 倍)

彗星の公転周期： $T=2.4\times 10^9$ [s] (約 76 年) $\pi=3.14$

こうして、ハレー彗星が近日点を通過する時の速さを計算してみると、太陽に近い場所では、かなりの高速で動いていることがわかる。したがって、周期 76 年のうち地球から肉眼で観測できる期間はわずか数か月程度になることもうなずける。なお、ハレー彗星の次回の出現は 2061 年の夏と計算されている。1986 年の出現では地球と太陽の位置関係が悪く、肉眼による尾の観測が困難であったが、2061 年には長い尾をもった大彗星となることを期待したい。

第3問

寒い屋外で水を温めようとした場合、非常に時間がかかり、短時間で十分な温度まで上げることは難しい。これは、水を加熱すると同時に放熱が起こっているからである。次のような実験を通して、熱の出入りについて考えてみよう。



以下の関係を用いなさい。

- 電力 P [W] は電圧 V [V] と電流 I [A] の積 ($P=VI$) であらわされる量である。
- 電力量 W [J] は電力 P [W] と時間 t [s] の積 ($W=Pt$) によってあらわされる量である。
- 質量 m [g] の水において、熱量 ΔQ [J] , 比熱 c [J/(g · K)] 温度変化 ΔT [K] の関係式は

$$\Delta Q = mc \Delta T \cdots(1)$$

(水の比熱 $c = 4.2 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$) となる。

※ K (ケルビン) は温度を絶対温度で表す時の単位であり、1 K の温度変化は温度差 1°C の温度変化と同じである。

※ 熱量と電力量は等価 (互いに等しい量) である。

※ Δ (デルタ) 記号は微少な変化量を示すとき、物理量を表す記号の前につけている。

まず、放熱を無視できるような容器を用いて実験する場合を考える。

図1のように 10 V の電圧をかけたときの電力が 20 W の電熱線がある。

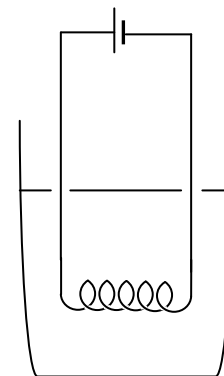


図1

問1 この電熱線に 10 V の電圧をかけた場合、この電熱線に流れる電流は何 A か答えなさい。

問2 容器に 50 g の水を入れて、この電熱線に 10 V の電圧をかけ、100 s 間加熱したとしたとき、水は何 $^\circ\text{C}$ 上昇するか答えなさい。小数第2位で四捨五入して小数第1位まで求めなさい。

問3 この電熱線に 10 V の電圧をかけ、 17°C 、50 g の水を温めた。水温 T [$^\circ\text{C}$] と時間 t [s] の関係式を表しなさい。

次に、水の放熱について考える。ニュートンにより経験的に求められた冷却の法則によると、短い時間 Δt [s] での熱の流出量 ΔQ [J] はその時点での水の温度 T [°C] と外気温 T_e [°C] の差に比例しているとされている。式で表すと、

$$\Delta Q / \Delta t = -\alpha(T - T_e) \dots(2)$$

となる。ここで、 α [J / (K · s)] は液体を入れている容器などによって決まる量である。例えば、ガラス容器ならば冷却が速いので大きく、木製容器なら冷却が遅く小さい値となる。マイナスが付いているのは、時間とともに、熱量が失われていくことを表しており、 $\Delta Q / \Delta t$ は単位時間の放熱量と同じである。給湯ポットなどでは、この α の値をなるべく小さくする工夫がなされているのである。

問4 比熱と熱量の関係式(1)と、ニュートンの冷却の法則の式(2)を用いて、 $\Delta T / \Delta t$ を m, c, α, T, T_e を用いて表しなさい。

問5 ビーカーに、温度 92°C、50 g の水を入れて室温 17°C の室内に放置しておいた。水温と時間のグラフは図2のようになった。水の冷却はニュートンの冷却の法則にしたがうものと考えて問4で求めた関係式をみたすものとする。

これをもとに水 50 g を 60°C まで熱するためには何 W 以上の電熱線が必要になるか。グラフを利用して答えなさい。なお、答は小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めなさい。

(ヒント) $\Delta T / \Delta t$ において Δt を非常に小さくすると接線の傾きとなる。

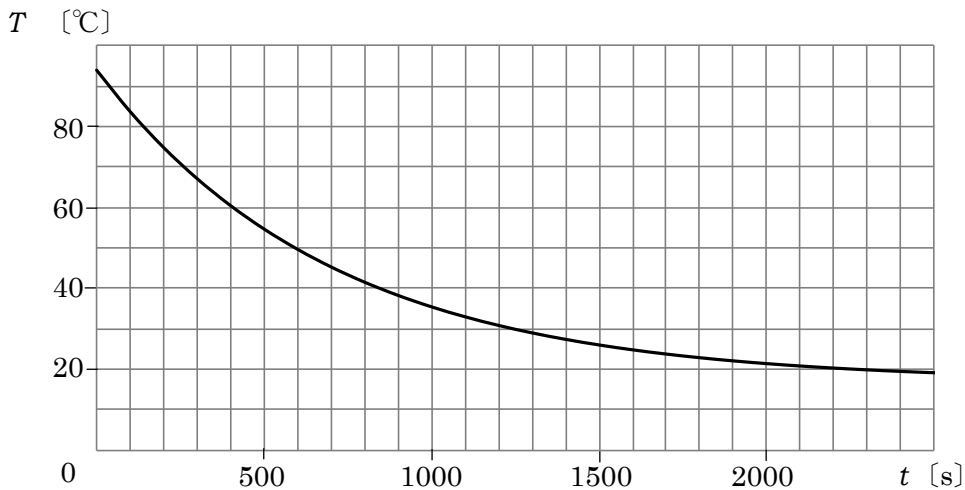


図2

次に電力 P_{in} [W] の電熱線を水に入れて加熱する場合を考える。電熱線の電力とニュートンの冷却の法則を考えると、 T [°C] の水が、単位時間に受け取る熱量 P [W] は

$$P = P_{in} - \alpha(T - T_e) \quad \dots(3)$$

となる。この熱量のすべてが温度上昇に使われた場合、時間に対する水の温度は、式(3)に式(1)を代入してできる微分方程式を解くことによって求めることができる。これについては、諸君のこれからの学習に期待するところである。今回は、微分方程式の解き方をういないで計算を進めていこう。式の(1)と式(3)に下のような条件で数値的な計算を行う。

ある容器に 17 °C の水を 50 g 入れて、電力が 50 W の電熱線で 200 s 間加熱すると、その水が何°C になるかを計算する。ただし、外気温は 17°C とし、 α を 0.20 J/(K・s) とする。

上に述べたように、時間とともに T [°C] も変化しているため Δt [s] 間 (区分時間) は一定の温度と考えて計算をする。最終的に Δt [s] を 0 に近づけると、この条件における最終的な水の温度が求まる。計算の手順は次の通りである。

- ① 式(3)より、水の温度が T [°C] の場合の P [W] を計算する。
- ② ①で求めた P [W] に Δt [s] をかけて、そのときに得られる熱量 Q [J] を計算する。
- ③ 式(1)より、そのときの温度上昇 ΔT を計算する。 $T + \Delta T$ [°C] が $t + \Delta t$ [s] の温度となる。
- ④ ①の T を③で求めた温度に置き換えて計算する。
- ⑤ ①~④を 0 s ~ 200 s の区間で繰り返す。(Δt が小さいほど計算回数は多くなる)

図3はこの計算のイメージ図であり、この計算手順によって求めた値は表のようになった。

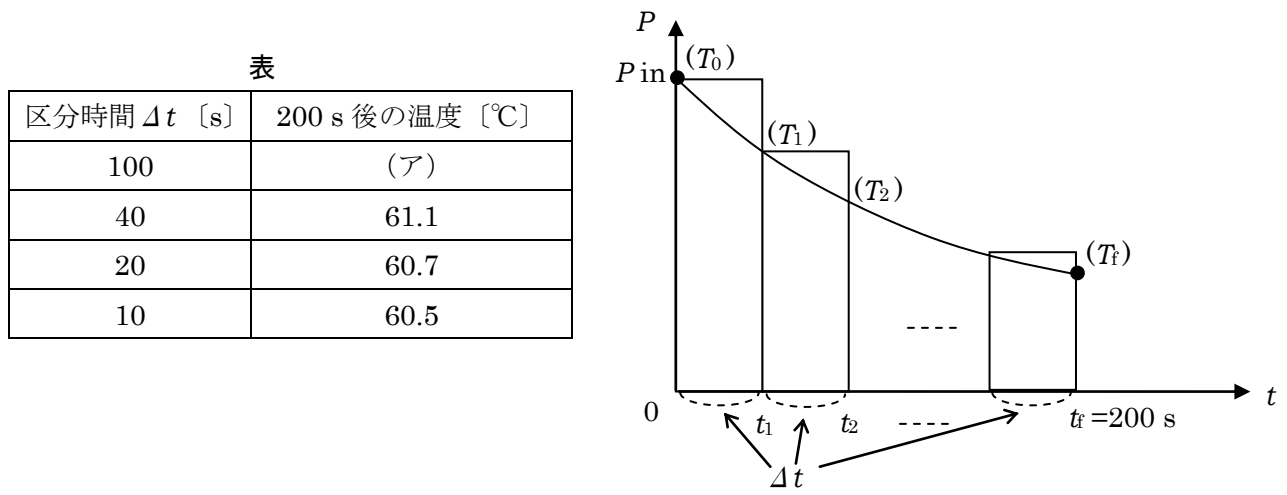


図3

問6 表の(ア)の値を小数第2位で四捨五入して小数第1位まで求めなさい。

問7 表をもとにして横軸を区分時間 Δt [s]、縦軸を 200 s 後の温度としてグラフを作成し ($\Delta t = 100$ s の点は記入しなくてよい)、外挿近似することによって Δt [s] を 0 に近づけたときの 200 s 後の温度を小数第1位まで求めなさい。外挿近似とは、グラフを延長してデータがない部分に対して近似的に値を求めることである。

与えられた式を使って物理量を求めたい場合、このように区分しながら数値計算をするという方法がある。この方法は、コンピュータが発達している現代において、自然科学を理解するうえで非常に強力な武器となっている。

以下余白



岡山県マスコット ももち