科学オリンピックへの道オープン

岡山物理コンテスト2012

問題Ｂ

2012年10月28日（日）
11:25～12:35（70分）

問題にチャレンジする前に次の＜注意事項＞と＜指数を用いた数の表記＞をよく読んでください。

問題は大問３題からなります。問題は一見難しく見えても，よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

１．開始の合図があるまで，問題冊子（全10ページ）を開けてはいけません。

２．電卓は使用できます。

３．携帯電話などの電源は切り，カバンの中にしまっておきなさい。

４．すべての解答は，解答用紙に記入しなさい。解答用紙3枚すべてに，必ずチャレンジ番号と氏名を記入しなさい。

５．気分が悪くなったりトイレに行きたくなったりしたとき，または質問があるときは手を挙げて監督者に知らせなさい。

６．終了の合図があったら，ただちに解答を止め，チャレンジ番号と氏名を確認の上，監督者の指示を待ちなさい。

７．問題冊子は持ち帰りなさい。

＜指数を用いた数の表記＞

大きい数や小さい数を扱うときには，指数表記を利用することが多い。

$$1.2\times10^{3}=1.2\times10\times10\times10=1200 \qquad 1.2\times10^{-3}=1.2\times\frac{1}{10^{3}}=\frac{1.2}{1000}=0.0012$$

指数表記では，一般に $a\times10^{n}$ （$1\leqq a<10$）の形で表す。
このように記述することで，大きな数や小さな数を簡潔に表現でき便利である。

【例】　地球から太陽までの距離 ＝150000000 km ＝ 1.5×10^{8} km
電子の質量 ＝0.00000000000000000000000000000091 kg ＝ 9.1×10^{-31} kg

第１問

図１−１のような，それぞれ抵抗値 R と $2R$ の２種類の抵抗器と，電圧 V の電池による回路がある。ただし，電池の内部抵抗は無視して考えなさい。

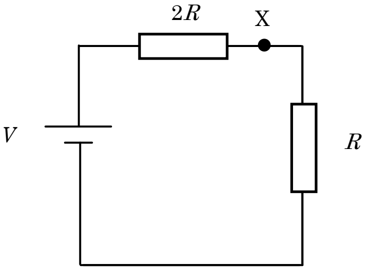

図１−１

問１　図１−１の X 点に流れる電流 I と，回路全体の消費電力 P を求めなさい。

次に，図１−２のような，抵抗値 $2R$ の抵抗器と可変抵抗器 A，B，C，及び電圧 V の電池による回路がある。次の文章を読み，以下の各問いに答えなさい。

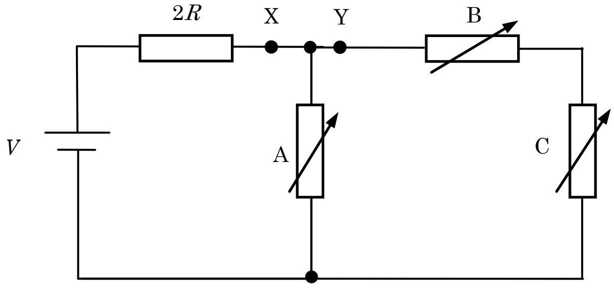

図１−２

可変抵抗器 A，B，C の抵抗値は，はじめすべて同じ R にしてある。この回路に流れる電流の大きさを求めたい。

オームの法則やキルヒホッフの法則を使う方法もあるが，ここでは，回路の分岐点に電流が流れ込むと，電流は各抵抗器の消費電力の和が最小になるように分かれて流れるという「最小発熱の原理」を用いて，可変抵抗器 A に流れる電流の大きさを求めてみよう。

X 点に流れる電流を I_0，可変抵抗器 A を流れる電流を I_A とおく。可変抵抗器 A，B，C での消費電力の和である P_{ABC} を，I_0，I_A，R を用いて表すと，

$$P_{ABC} = \boxed{} I_A^2 - \boxed{} I_A + \boxed{}$$

という，I_A に関する２次関数で表すことができる。$\boxed{}$内には，定数となる数式が入る。

問２　この式を完成させ，最小発熱の原理を用いて，P_{ABC} が最小値になるときの I_A と P_{ABC} の値を求めなさい。

問３　図１−２で可変抵抗器 A，B，C の抵抗値を変えると，Y 点に流れる電流が X 点に流れる電流の半分になり，B と C の消費電力は等しくなった。このときの可変抵抗器 A，B それぞれの抵抗値 R_A，R_B の比 $\dfrac{R_A}{R_B}$ を求めなさい。

次に抵抗値 R と $2R$ の２種類の抵抗器を組み合わせ，図１－３のような回路を作った。

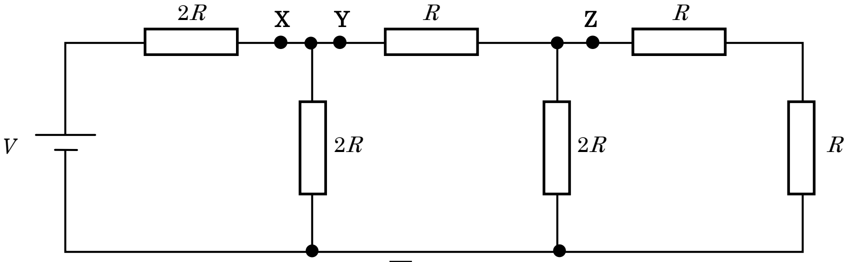

図１－３

問４　図１－３の X 点に流れる電流を I_0 として，Y 点，Z 点に流れる電流を，それぞれ I_0 を用いて表しなさい。

さらに，抵抗値 R と $2R$ の２種類の抵抗器をそれぞれ規則的に組み合わせて，図１－４のような回路を作った。図１－４では分岐点に番号をつけており，ここでは分岐点の数が n 個あるものとする。

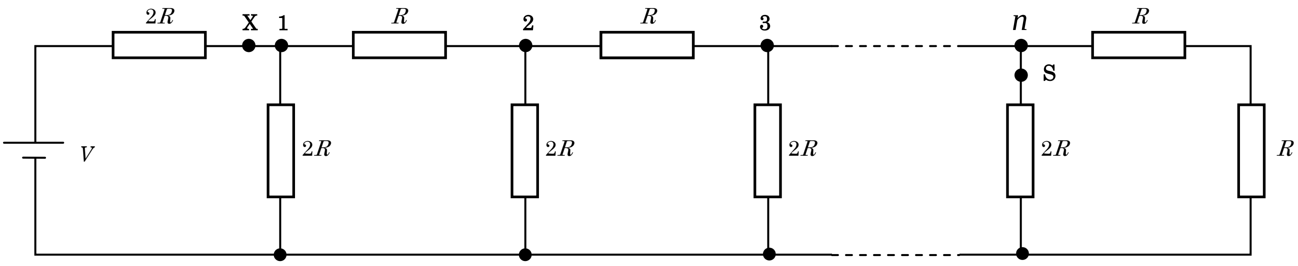

図１－４

問５　図１－４の，電池を除いた部分の回路全体の合成抵抗を求めなさい。

問６　図１－４の X 点に流れる電流を I_0 とする。S 点を流れる電流 I_n を，n，I_0 を用いて表しなさい。

第２問

今年の春に東京スカイツリーが竣工した。そこに設置されているのは日本製のエレベータであり，速さは世界最速級でありながら，乗り心地は快適になるように設計されている。そこで，エレベータの運動について考えてみたい。

まず，静止していたエレベータが上昇する場合について考えてみよう。図２−１，図２−２のグラフで示されるような「運転曲線」をもつエレベータの上昇について以下の問いに答えよ。ただし，速度と加速度は上向きを正とする。

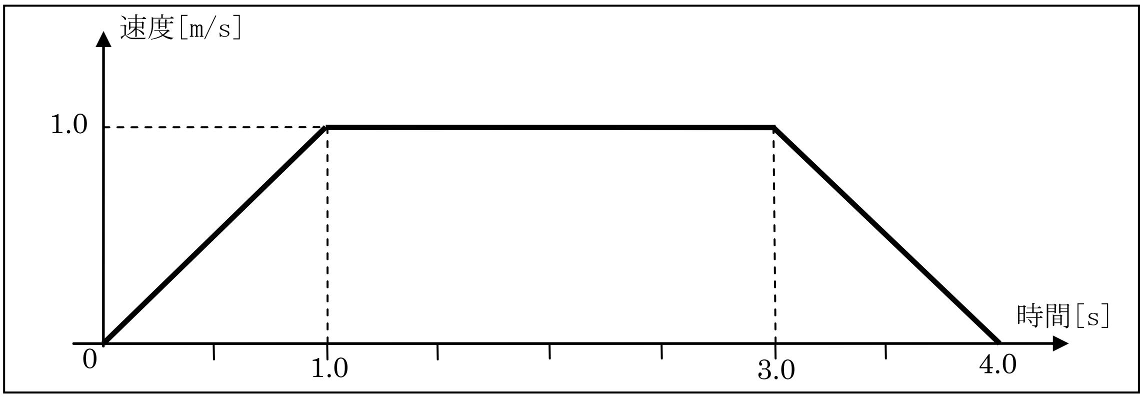

図２−１

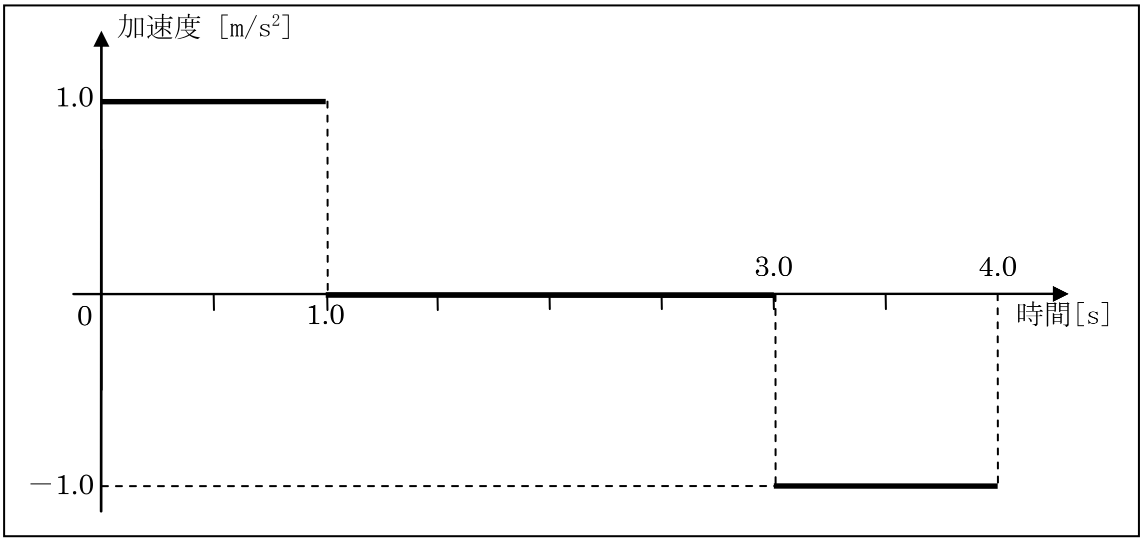

図２−２

問１　エレベータの地上からの高さを縦軸に，動き始めてから経過した時間を横軸にしたグラフをかきなさい。ただし，グラフには補助線（それぞれの座標軸から垂直に引いた破線）を用いて 1.0s, 3.0s, 4.0s のときに到達した高さを示しなさい。

エレベータの乗客が乗り心地良く感じるには，単位時間あたりの加速度の変化である「**加加速度**（かかそくど）」の大きさを小さくすることが重要である。**図２－２**のグラフでは，加速度の値が急に変化するグラフとなっているため，加加速度の値が無限大か 0 のいずれかになっている。そこで，**図２－３**のグラフで示されるエレベータの上昇運動を考えてみよう。

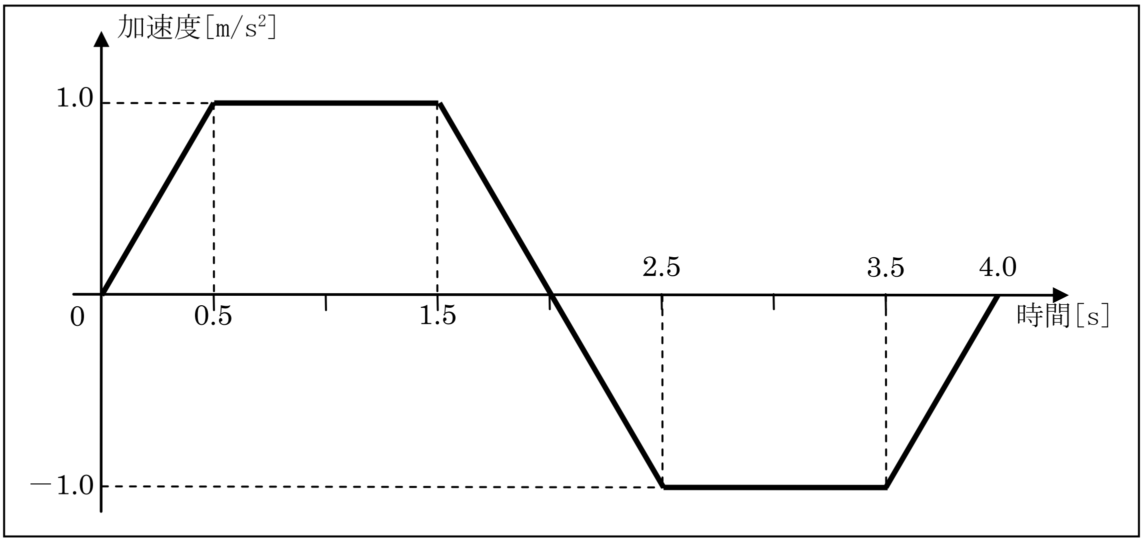

図２－３

問２　エレベータの加加速度を縦軸に，動き始めてから経過した時間を横軸にしたグラフをかきなさい。ただし，グラフには補助線を用いて 0.5s，1.5s，2.5s，3.5s の加加速度を示しなさい。

問３　エレベータの速度を縦軸に，動き始めてから経過した時間を横軸にしたグラフをかきなさい。ただし，グラフには補助線を用いて 0.5s，1.5s，2.5s，3.5s の速度を示しなさい。

こうすると速度変化が穏やかになって少し快適になる。しかし，**図２－３**のグラフの 0.5s，1.5s，2.5s，3.5s では加速度が不連続に変化する。

（問題は次のページに続く）

次に，もっとよい乗り心地を得られるように，加加速度をもっとなめらかにした運転曲線を考えよう。

その例を**図2－4，図2－5，図2－6，図2－7**のグラフに示す。このグラフは正弦曲線（三角関数を表す波形の曲線）といわれるものである。一般に，速度と時間の関係を表す v - t グラフの面積は，移動距離を表すが，このことは，正弦曲線の場合でも同じである。

なお，グラフのなかで，π は円周率である。

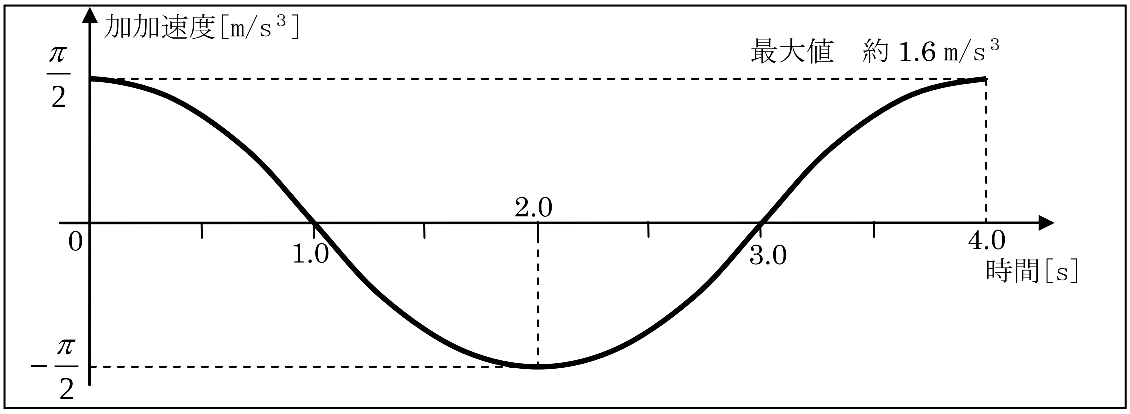

図2－4

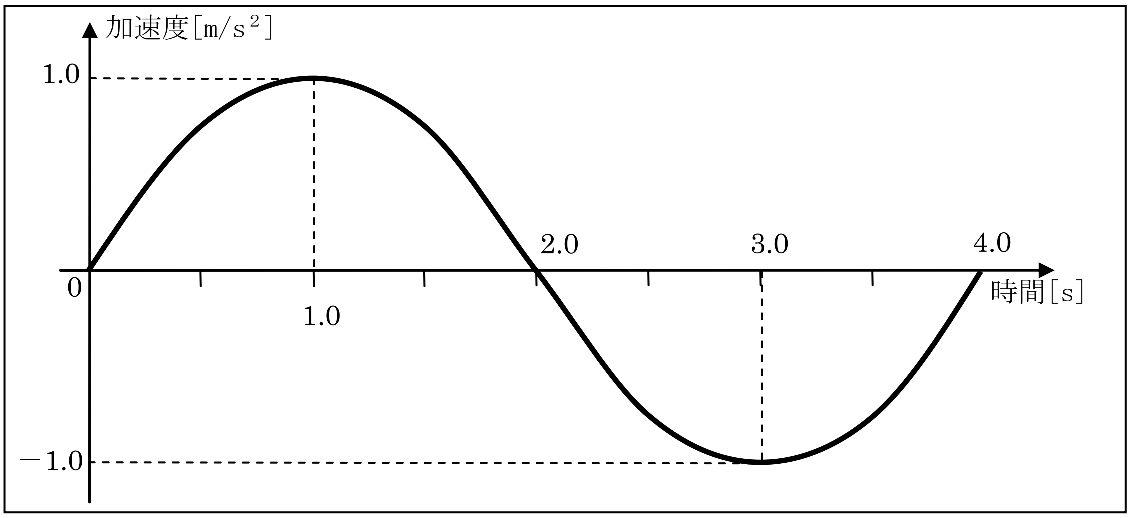

図2－5

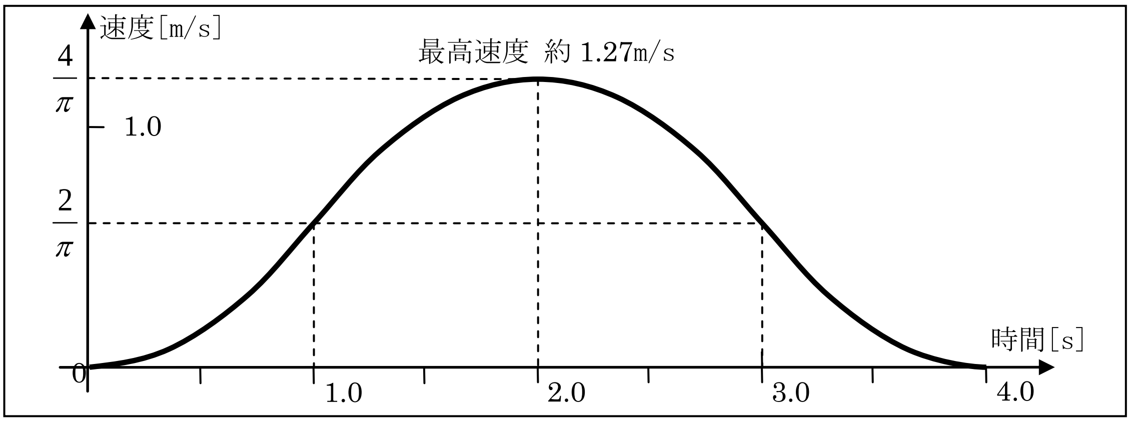

図2－6

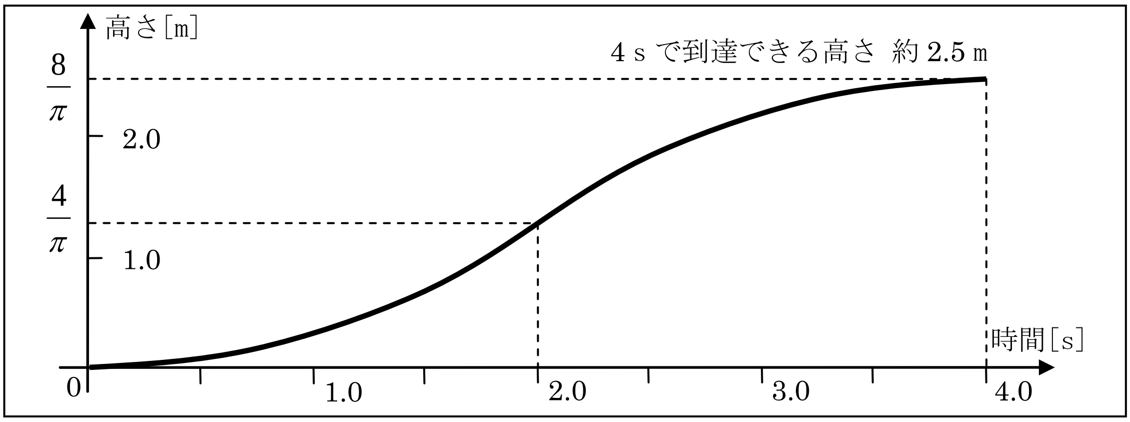

図2－7

このグラフからわかるように，この正弦曲線による運転では，4.0s で高さ約 2.5 m まで上昇することができる。

東京スカイツリーの展望デッキまで上がるエレベータでは，最高速度が約 10 m/s となるような運動をしているが，ここでは $\dfrac{30}{\pi}$ [m/s]として計算しよう。快適にかつ短い時間で運動するには，**図2－8**のグラフのように加速度が 1.0 m/s^{2}になったときと，－1.0 m/s^{2}になったときに，それぞれある時間 t_0[s]だけ一定の加速度で上昇するように運転すればよい。その間は等加速度直線運動となる。

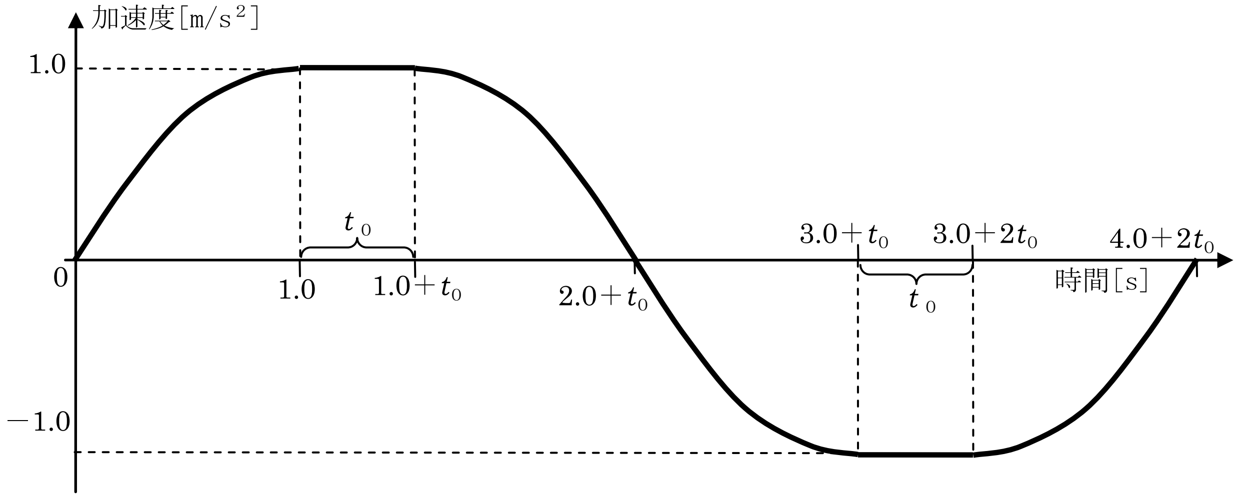

図2－8

問４　エレベータの加加速度を縦軸に，動き始めてから経過した時間を横軸にしたグラフをかきなさい。

問５　エレベータを**図２－８**のグラフの加速度で運転したとき，エレベータが上昇した高さを求めなさい。ただし，π はそのままでもよいものとする。

問５の結果から，展望デッキ（地上 350m）まで上がるエレベータでは，最高速度でおよそ 25 秒間，等速で上昇していることがわかる。

第３問

今からおよそ 100 年前, 原子の構造を調べる実験がラザフォードのグループによっておこなわれた。メンバーの一人，マースデンがおこなった最初の実験の略図が**図３－１**である。これは，α 線（正電荷をもっている粒子）を金箔（きんぱく）に当て，α 線が入射する方向に対し 90° 以上の大きな角度で散乱（これを「大角度散乱」という）することを確認するために用いた装置である。線源を出た α 線は金箔に当たり，大角度散乱したものは感光板に当たる。感光板は α 線が当たった場所が光るため，その光を顕微鏡で観測することによって α 線が大角度散乱される様子を調べることができる。このとき，鉛の板は線源から出た α 線が感光板に直接当たるのを防いでいる。

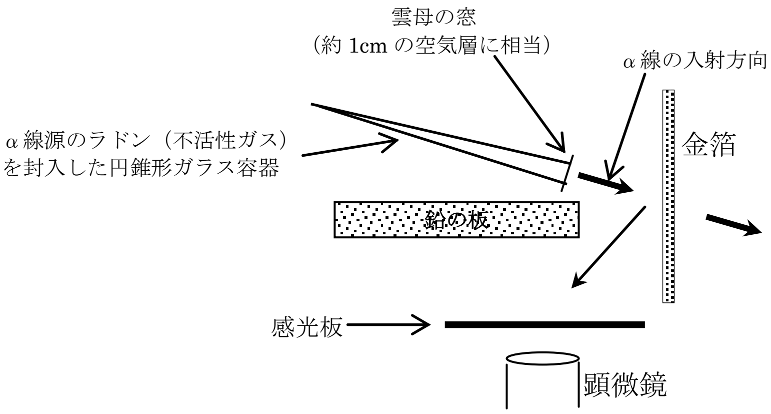

図３－１

この実験によって金箔による α 線の大角度散乱が確認された。これをきっかけとしてラザフォードらが考察を重ね，原子核の存在が明らかになったのである。これをモデル化して考え，原子核の大きさを求めてみよう。

まず，α 線を正の電気量をもった軽い粒子 A，標的の金原子の原子核を，正の電気量をもった重い粒子 B とし，粒子 A を静止している粒子 B に打ち込むというモデルで考える。

電子１個のもつ電気量は $-e$ で，この e は電気量の基本単位となっている。Z_{A}，Z_{B} を正の整数として，粒子 A，B のもつ電気量をそれぞれ $+Z_{\mathrm{A}}e$，$+Z_{\mathrm{B}}e$ と表す。

また，粒子 B は粒子 A に比べて非常に重く，衝突によっても動かないものとする。粒子 A，B にはクーロン力（電気力）のみが働くものとする。クーロン力は，粒子 A，B が十分離れている場合は無視できるとする。

まず，**図３－２**のように，はじめ粒子 A は，粒子 B から十分離れたところにあり，速度 v で打ち出されるとする。粒子 A が粒子 B に近づくと，次第に反発力であるクーロン力が大きくなるので，運動エネルギー K をクーロン力に逆らって進むための仕事に費やし，ついには運動エネルギーが 0 になって一瞬停止する。このとき粒子 A には，**図３－３**のように，クーロン力による位置エネルギー U が蓄えられている。粒子 A，B 間の距離を r としたとき，粒子 A のクーロン力による位置エネルギー U は，$U = k_0 \dfrac{Z_{\mathrm{A}}e \cdot Z_{\mathrm{B}}e}{r}$ と表される。

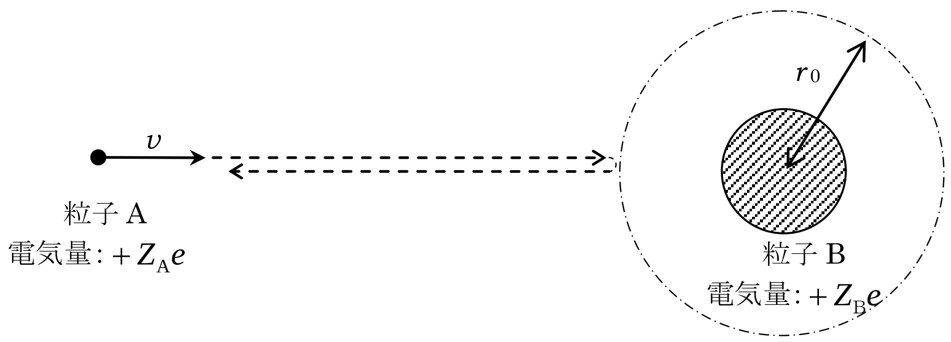

図3－2

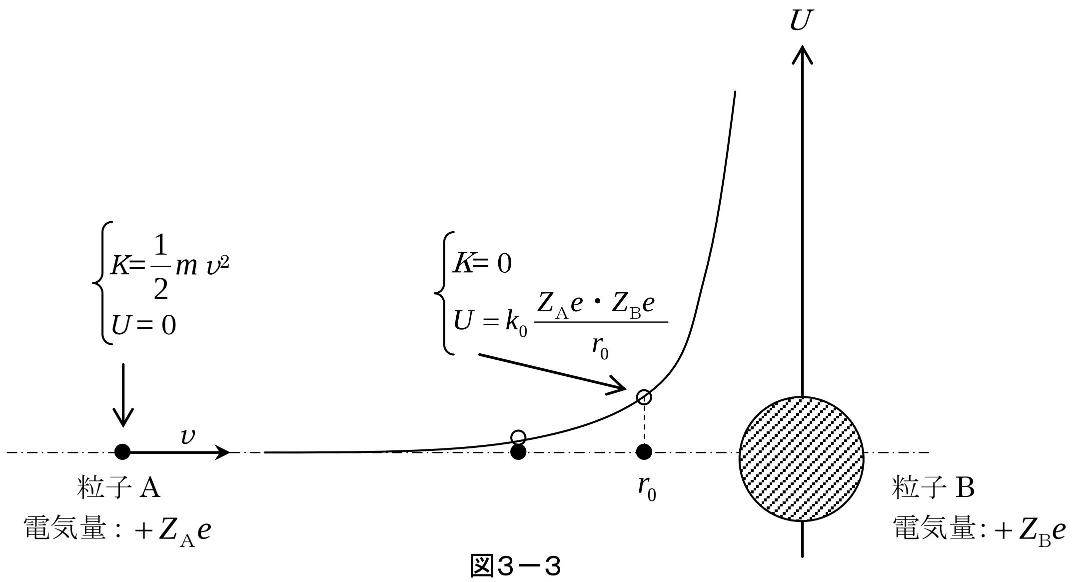

図3－3

問１

(1) 「運動エネルギー」と「クーロン力による位置エネルギー」の和は常に一定の値であるというエネルギー保存の法則が成立するとして，r_0 を与えられた記号を用いて表しなさい。

(2) 少し具体的な計算をしてみよう。

α 粒子の質量と電荷比 $\dfrac{質量}{電荷}=\dfrac{m}{Z_Ae}=2.0\times10^{-8}$ [kg/C] ， $k_0=9.0\times10^{9}$ [Nm²/C²] ，

$e=1.6\times10^{-19}$ [C]， $v=2.1\times10^{7}$ [m/s] を代入して計算すると，

$$r_0=Z_B\times\boxed{}\ \text{[m]}$$

という結果になる。$\boxed{}$に当てはまる数値を $a\times10^n$ の形で書きなさい。

金原子の大きさ（約 2.5×10⁻¹⁰m）はすでに知られていた。仮に金原子が電子の 100 倍の電荷をもっていたと考えても，r_0 の値は金原子の大きさの約 1000 分の 1 より小さくなる。

これにより，金原子程度の大きさのものに衝突したのではなく，原子の中のはるかに小さいものと衝突したということが推測される。

実際の原子核の大きさ r_0 を直接測定することはできない。そこで，r_0 を調べる別の方法を考える。

粒子 A は，r_0 より近づくことができないので，こんどは，粒子 A を剛体球 X に，粒子 B を半径 r_0 の剛体球 Y におきかえたモデルに変更する。ここで，剛体球とは，質量と大きさはあるが変形しない球のことである。

図3－4のように，剛体球 X が，半径 R の円の範囲内に無数に打ち込まれているとする。向きは，円の中心と剛体球 Y の中心を結ぶ中心線に平行であるとする。

剛体球 X が，この円内のどこを通過するかによって，剛体球 Y との衝突が決まる。ただし，剛体球 Y は重いため，衝突後も静止しているものとする。衝突後の散乱は，**図3－5**のように，剛体球 Y 表面の衝突点と Y の中心を結ぶ線に対し，同じ角度で散乱していくものとする。

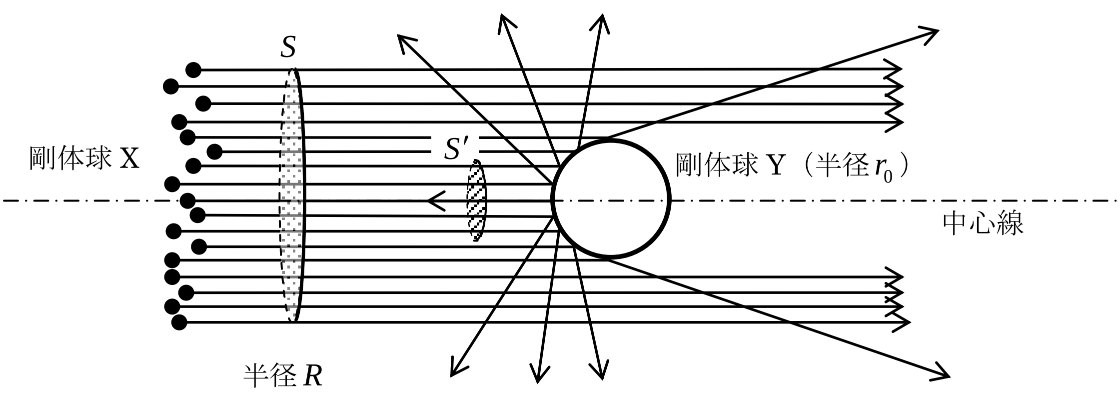

図3－4

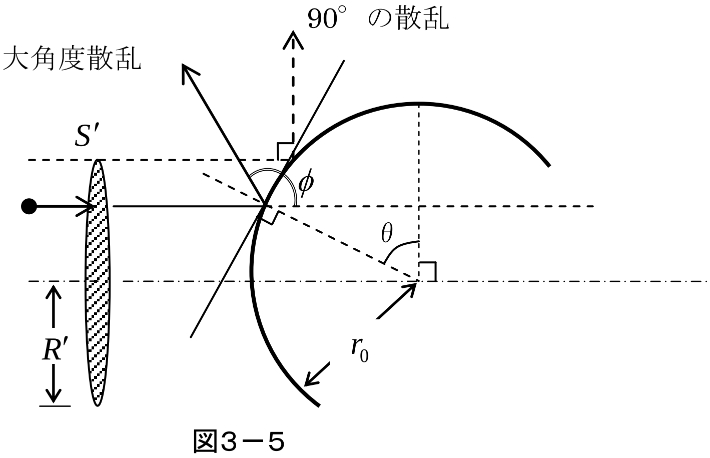

図3－5

問２　散乱する角度 ϕ が 90° ～180° になる大角度散乱は，**図3－5**の半径 R' の円を通過する剛体球 X のみである。この部分の面積 S' を r_0 で表しなさい。ただし円周率を π とする。

剛体球Xの全体集合が通過する半径Rの円の面積をSとする。単位面積あたりに通過する剛体球Xの個数をnとすると，剛体球Yに向けて入射する剛体球Xの個数N_iは$n \times S$，その内で大角度散乱するものの個数N_Sは$n \times S'$と表すことができる。

問３　入射する剛体球Xの個数N_iに対する大角度散乱する個数N_Sの割合$\dfrac{N_S}{N_i}$をPとしたとき，S'をP，Rを用いて表しなさい。また，r_0をP，Rを用いて表しなさい。

これらの結果より，多数のα線照射実験を行い，大角度散乱の割合を調べることによってPが得られ，別の実験によってRが得られた。これらより，r_0を求めることができた。

（問題終わり）