科学オリンピックへの道オープン
問題Ｂ

2011 年 11 月 20 日（日）
11:25～12:35（70 分）

問題にチャレンジする前に下記の**＜注意事項＞**と**＜科学的な指数表記＞**をよく読んでください。

問題は大問３題からなります。問題は，一見難問に見えても，よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

１．　開始の合図があるまで，問題冊子（全９ページ）を開けてはいけません。
２．　電卓を使用することはできません。携帯電話などを時計として使用することもできません。携帯電話などの電源は切って，しまっておきなさい。
３．　すべての解答は，解答用紙に記入しなさい。解答用紙 5 枚すべてに，必ずチャレンジ番号と氏名を記入しなさい。
４．　気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき，または質問がある場合は手をあげて監督者に知らせなさい。
５．終了の合図があったら，ただちに解答用紙のチャレンジ番号と氏名を確認の上，監督者の指示を待ちなさい。
６．問題冊子は持ち帰りなさい。

＜科学的な指数表記＞

大きい数や小さい数を扱うときには，指数を利用することが多い。

地球から太陽までの距離＝1.5×10^{11} m，　電子の質量＝9.1×10^{-31} kg

のように，$A\times10^{n}$（$1\leqq A<10$）の形で一般的には表す。

このように記述することで，大きな数や小さな数を簡潔に表現でき，便利である。

【例】

第１問

「光を，光と同じ速さで追いかけたら，どのように見えるのだろうか？」
これは，当時スイスにいた，16 歳のアルバート・アインシュタインの脳裏に浮かんだ疑問である。それから 10 年後の 1905 年，26 歳となったアインシュタインはこの疑問に対する答にたどりついた。それがニュートン以来の時間と空間の概念に革命をもたらした「特殊相対性理論」である。

それまで時間の流れ方は宇宙空間のどこにいても，観測者がどのような運動状態にあっても常に一定であると考えられていた。しかし，アインシュタインは常に一定なのは時間の流れ方ではなく光の速度であると考えた。これを「光速度不変の原理」という。「光速度不変の原理」によると時間の進み方や，空間の中の長さは相対的なもので，比べる人や物に応じて伸び縮みすることになる。

〔Ａ〕一般的な速度の合成と〔Ｂ〕「光速度不変の原理」による時間の流れ方について以下の問いに答えなさい。

〔Ａ〕身近な速度の合成について, 川を進む船の運動をイメージしながら考えてみよう。図１のように一様な速さ 3.0m/s で流れる川を進む船の速度について考える。このとき船は, 静水中では 4.0m/s で進むことができるものとする。

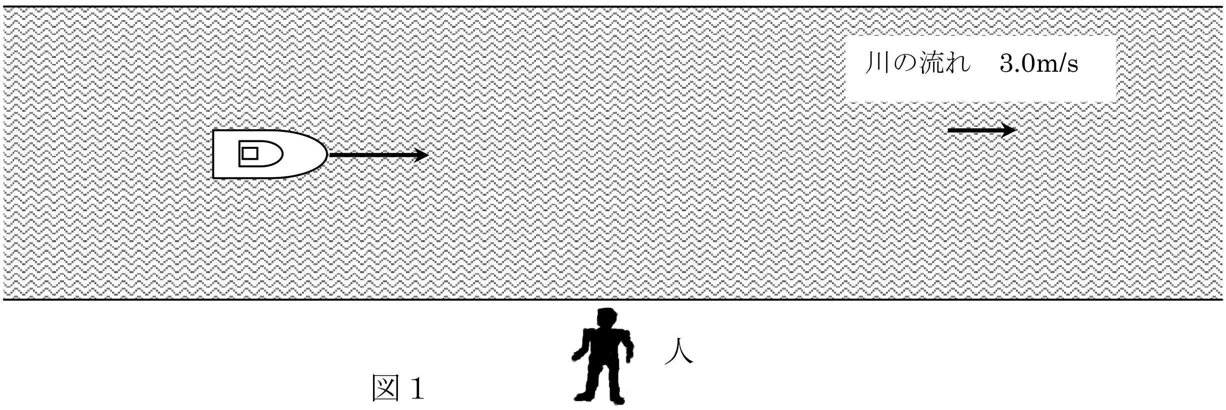


図１

問１　図１のように，船が川の流れに平行に川下に進むとき，岸に立っている人から見た船の速さはいくらか。

問２　図２のように，船が川の流れに平行に川上に進むとき，岸に立っている人から見た船の速さはいくらか。

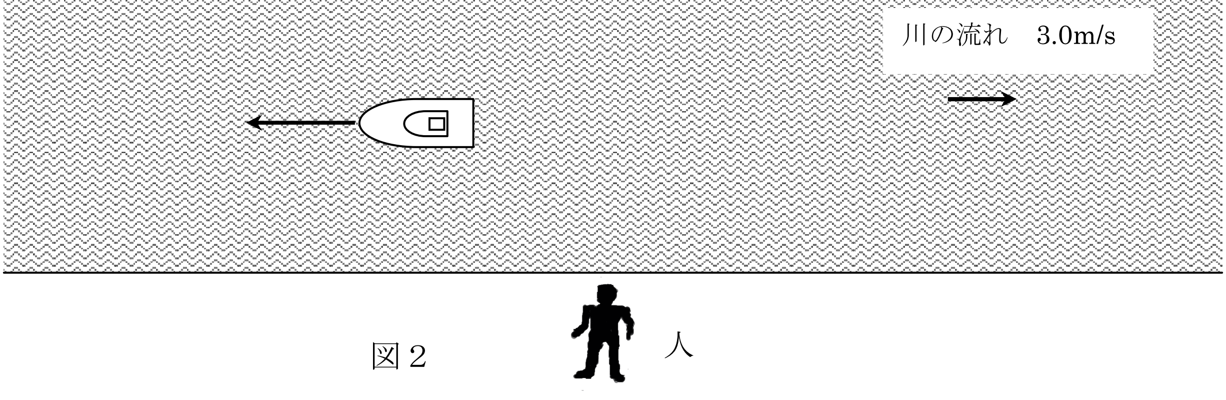


図２

次に, 図３のように船首を川の流れに垂直に向け，川を横断する場合を考えてみよう。

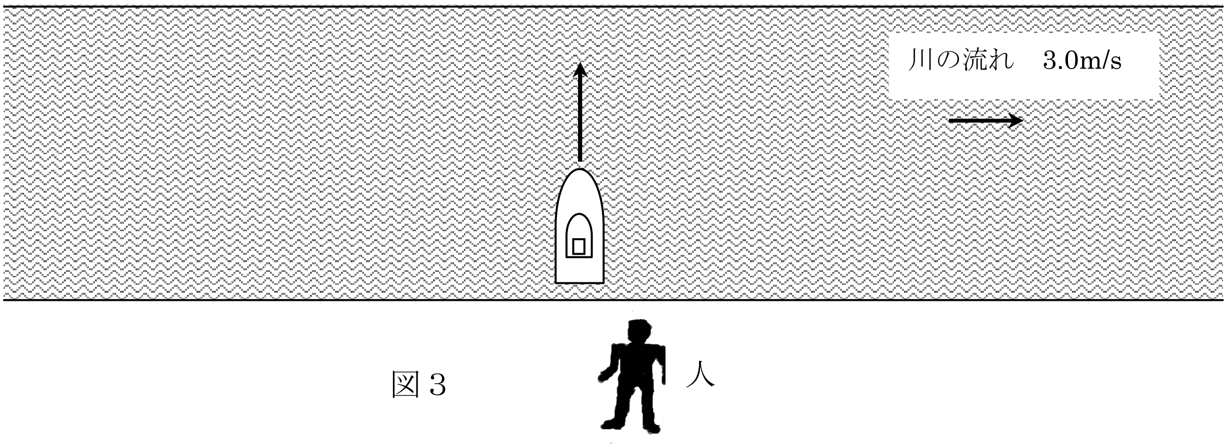


図３

問３　図３のように，岸に立っている人からみると，船はどのように進むか。その向きを解答用紙の図中に矢印で示しなさい。ただし解答用紙の１マスは速さ 1.0m/s とし，矢印は解答用紙の　●　印からはじまるものとする。

問４　図３のように岸に立っている人から見た船の速さはいくらか。

このように，一般的な速度の合成は考えられてきた。

〔**B**〕「光速度不変の原理」による時間の流れ方について考えてみよう。

図４のように，地上に対して一定の速さ v でまっすぐ進むロケットの中にいる人（観測者A）から見たとき，光源Oから出た光が，ロケットの進行方向と垂直に L だけ離れた壁Pに到達するのにかかる時間を考える。以下，光の速さを $c=3.0\times10^{8}\mathrm{m/s}$ とする。

問５　観測者Aから見た場合，点Oから出た光が点Pに到達する時間 t_1 を L，c を用いて表せ。

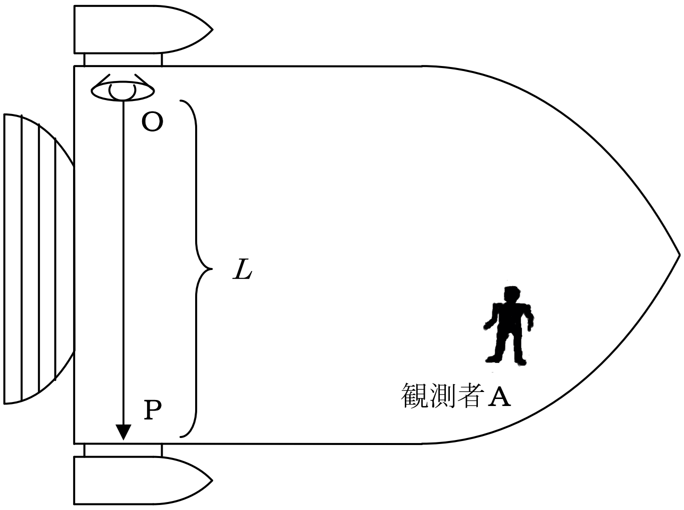


図４

次に図５のように，地上にいる人（観測者B）から見た場合を考えよう。

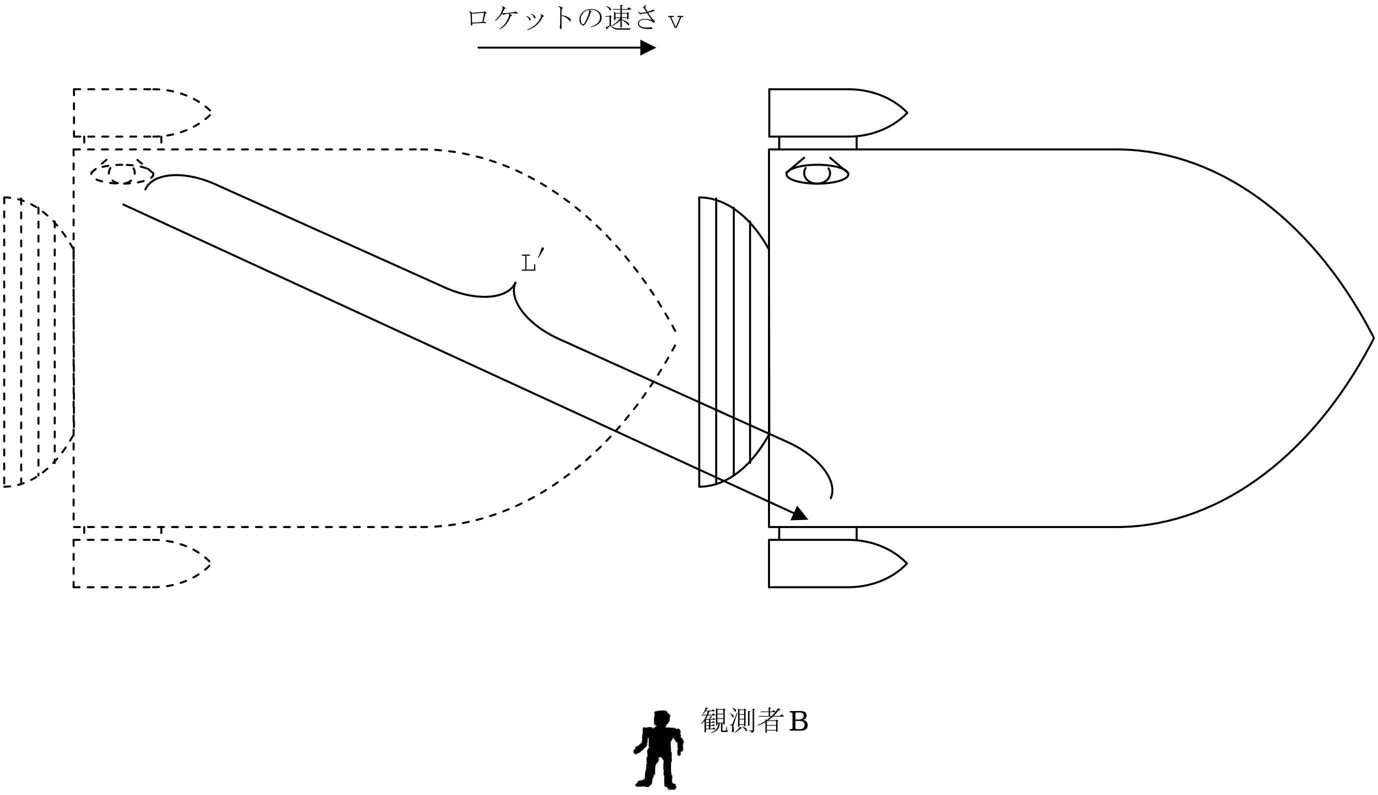


図５

観測者Ｂからみたとき，光はロケット内の点Ｏから点Ｐまで進む間に，ロケットの進行方向にも速さ v で進むことになるため，光は図５のように斜めに L' だけ進む。このとき「光速度不変の原理」から，観測者Ｂから見ても光は一定の速さで進むことになる。

問６　観測者Ｂから見た場合，光が点Ｏから点Ｐに達するまでの時間を t_2 とする。t_2 を L' と c を用いて表せ。

問７　この間にロケットは $v \cdot t_2$ だけ進む。光の進んだ距離 L' を L, v, t_2 を用いて表せ。

問８　問６と問７の結果から，t_2 を L, c, v を用いて表せ。

問９　$\dfrac{t_1}{t_2}$ を c, v を用いて表せ。

問 10　問９の結果は観測者Ａと観測者Ｂの時間の進み方が異なることを表している。どのように異なるのか，簡潔に答えなさい。

第２問

大きさがあり，力を加えても変形しない理想的にかたい物体を剛体という。剛体に力を加えると回転をする場合がある。

例えば，図６のように，材質や太さが均一で，質量の無視できる長さ $2l$ の軽い剛体の棒 **ab** がある。この棒を水平にし，**ab** の中点**O**で支え，**a** 端に重さ w のおもりを１個つり下げると，おもりにはたらく重力によって棒は点**O**を中心として回転しようとする。この効果を「点**O**のまわりの力のモーメント」という。その大きさは，おもりにはたらく重力 w と回転の中心である**O**点から力の作用線までの距離 l の積 wl で表される。

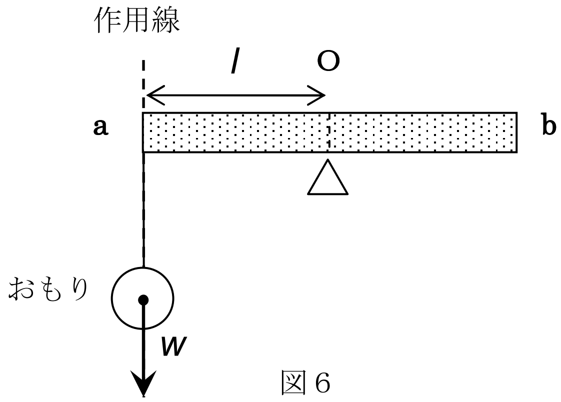


図６

しかし，剛体に力がはたらいても回転しない場合がある。図７は図６と同様に剛体の棒 **ab** を中点**O**で支え，**a** 端に重さ w のおもりを１個，また，**Ob** の中点 **c** には同じ重さ w のおもりを複数個つり下げた図である。このとき，**a** 端につり下げたおもりにはたらく重力による点**O**まわりの力のモーメントは，点**O**を中心として棒を反時計回りに回転させようとする。一方，点 **c** につり下げたおもりにはたらく重力による点**O**まわりの力のモーメントは，点**O**を中心として棒を時計回りに回転させようとする。

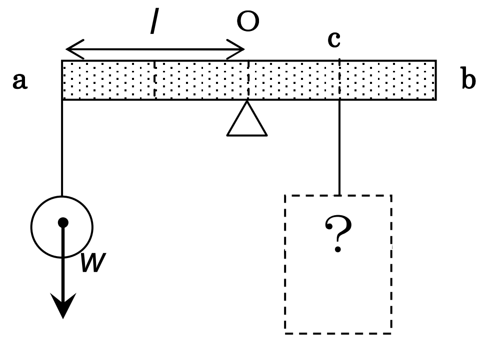


図７

問１　図７において，棒が水平な状態を保っているとき「点**O**まわりの力のモーメントはつり合っている」という。このとき，点 **c** には重さ w のおもりを何個つり下げている

か答えなさい。

次に，長さ L で，質量の無視できない剛体の棒ＡＢを，図８のように床に固定された机の端から $\dfrac{L}{4}$ だけはみ出すように置いた。棒には質量があるため，棒自体にも重力がはたらく。棒にはたらく重力の大きさを W とすると，この力は棒の重心Ｇ（ＡＢの中点）にはたらいていると考えればよい。

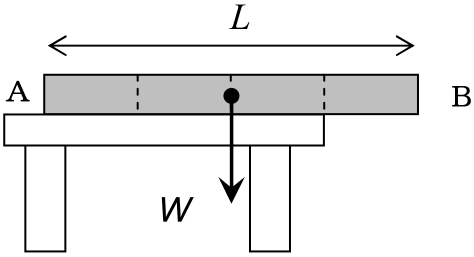


図８

この状態でＢ端に力を加える。ただし，力を加えても棒と机は互いに滑らないものとする。

問２　まず，図９のようにＢ端に鉛直上向きの力 F_1 を加えた。すると，棒はＡ端を回転の中心として，Ｂ端が少しだけ持ち上がった。このときＢ端に加えている力 F_1 の大きさはいくらか答えなさい。

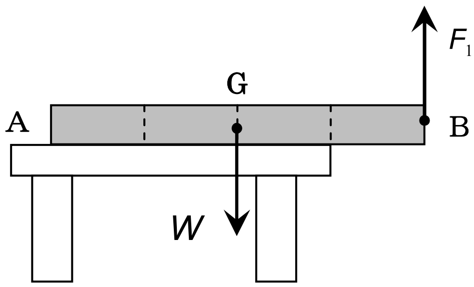


図９

問３　次に，図 10 のようにＢ端に鉛直下向きの力 F_2 を加えた。すると，棒は机の右端を回転の中心として，Ａ端が少しだけ持ち上がった。このときＢ端に加えている力 F_2 の大きさはいくらか答えなさい。

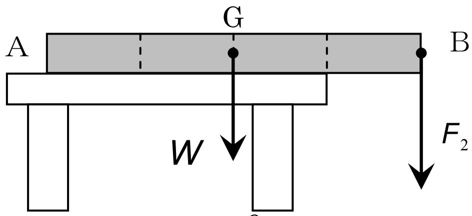


図 10

最後に，重さ W の棒ＡＢを数本重ねて，一番上にのっている棒のＢ端を机の右端からどれだけ遠くへ出すことができるかを考えてみる。例えば，棒１本では図 11 のように，机の右端に棒の重心がくるときが限界となる。このとき，棒のＢ端は机の右端から $\frac{L}{2}$ 出ていて，棒にはたらく重力の作用線は机の右端と一致している。

これ以上棒を右へずらすと，机の右端を中心とした重力による力のモーメントにより，棒は時計回りに回転して落下してしまう。

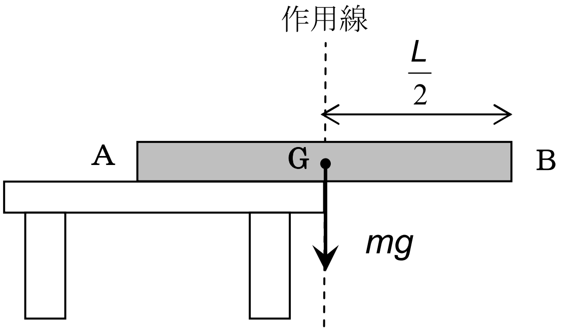


図 11

図 12 は棒が２本のときを示している。図 11 と同様に，机の右端に棒全体（２本分）の重心Ｇ′がくるときが限界となる。

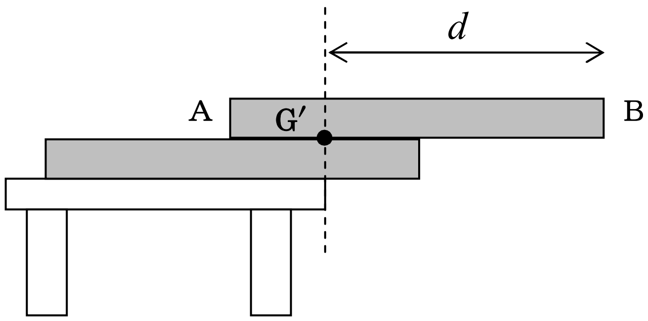


図 12

問４　このとき，上の棒のＢ端と机の右端との距離（図 12 中の d）はいくらか答えなさい。

問 5　棒の本数を増やしていくとき，一番上にのせた棒のＡ端が机の右端から外へ出るのは，最少で棒を何本重ねたときか答えなさい。

第３問

太陽系には，地球を含めて８つの惑星が存在している。太陽系の外にも，恒星の周りを公転する惑星が存在していることが様々な観測方法でわかっている。2010 年６月までに，このような惑星が約 460 個見つかっており，これらの惑星は「系外惑星」と呼ばれている。惑星の軌道は楕円軌道であるが，次の図のように，ここではすべての惑星の軌道が円軌道であるとして扱う。

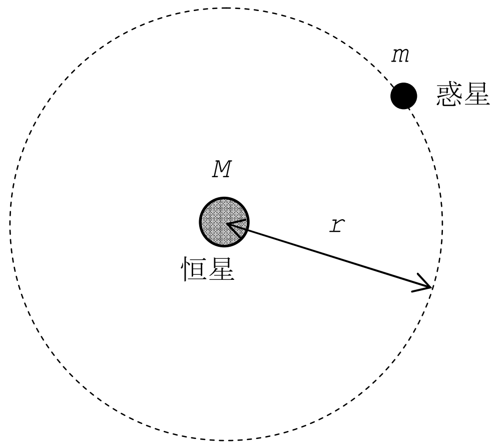


図 13

問１　2006 年 8 月に国際天文学連合総会において惑星の定義が決められた。これにより，それまで太陽系の惑星であると考えられていたある天体が準惑星とされた。この天体の名称を次の①～④のうちから１つ選び、番号で答えなさい。

①　めい王星　　②　天王星　　③　海王星　　④　土星

次に，恒星と惑星との間にはたらく万有引力について考えよう。ニュートンが発見した万有引力の法則とは,「質量を持つ２つの物体間には互いに引力が作用し合い，その引力の大きさ F は，互いの物体の質量 m_1，m_2の積に比例し，重心間の距離 r の２乗に反比例する。」というものである。これを式で表すと，次の(1)式となる。ここで，G は万有引力定数である。

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1)$$

いま，同じ質量 50kg の２人が 1.0m の距離だけ離れているときを考えてみよう。

問２　この２人の間にはたらく万有引力の大きさを求めなさい。ただし，万有引力定数 G を 6.67×10^{-11} N・m²/kg² とし，有効数字２桁で答えよ。

さて，恒星と惑星との間にはたらく万有引力となると，かなり大きな力となり，この力によって惑星は恒星の周りを回ることができている。

恒星の周りを公転する惑星の運動方程式は，次の(2)式で表すことができる。ここで，m は惑星の質量，M は恒星の質量，T は公転周期，r は軌道半径，π は円周率である。また，この式の右辺は，恒星と惑星との間にはたらく万有引力を示している。

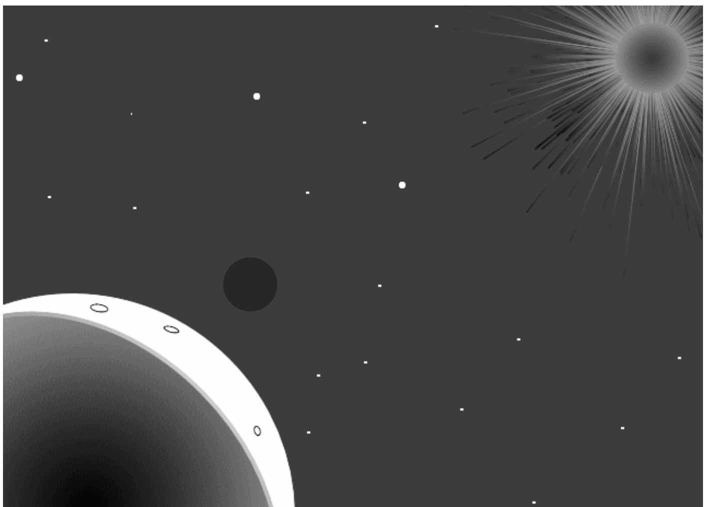
$$m\,r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\,\frac{M\ \ m}{r^2} \qquad (2)$$

問３　（２）式から，$\dfrac{T^2}{r^3}$ は定数となる。この値を M, G, π を用いて表せ。

地球の公転周期 T を１年，軌道半径を１AU とすると，太陽系の場合は，$\dfrac{T^2}{r^3}$ の値が１となる。距離を表す単位の AU は，地球と太陽との平均距離を１としたときの単位で，‘Astronomical Unit’「天文単位」という。

問４　太陽系に，軌道半径が地球の４倍の惑星があったとしたら，この惑星の公転周期は何年になるか。

問５　2007 年に発見された「Gl581d」と命名された系外惑星がある。この系外惑星は，太陽系（地球）から約 20 光年の距離にある Gliese581（グリーゼ 581）という恒星の周りを回っており，生命が存在する可能性があると言われている。その軌道半径は 0.22AU で，公転周期は 66.8 日である。計算を簡単にするために，軌道半径を 0.2AU，公転周期を 0.2 年とするとき，恒星 Gliese581 の質量は，太陽の質量の何倍と見積もることができるか。



Gliese581（右上）と，公転する惑星 Gl581d（左下）の想像図